Matemáticas en el Antiguo Egipto

Carlos Maza Gómez

Índice

Introducción

Numerosos restos arqueológicos se levantan aún a orillas del Nilo, en tierra egipcia. Son sólo una parte de los que encontraron los hombres a lo largo de los siglos anteriores: Los persas de Cambises, los griegos de Alejandro, los romanos, cristianos, los árabes mahometanos, turcos, la expedición napoleónica... Con todos ellos se fue deteriorando el legado que había dejado la antigua civilización egipcia, tan prolongada en el tiempo. ¿Qué queda de ellos finalmente? Algunos grandes templos y pirámides de piedra que resisten en su monumentalidad el paso de los siglos, estelas de piedra, estatuas, pequeños objetos cotidianos, algunos escasos papiros. Como decían los propios egipcios en un canto de arpista,

“Una generación pasa;
otra permanece, desde el tiempo de los antepasados.
Los dioses que existieron antes
y que reposan en sus pirámides,
los nobles glorificados que igualmente
fueron enterrados en sus pirámides,
los que construyeron los templos,
sus lugares [ya] no existen
¿qué se ha hecho de ellos?”[1]

Precisamente la labor de los estudiosos sobre la vida de Egipto y sus conocimientos es la de recuperar e interpretar el legado que nos dejaron en sus monumentos, en sus estelas y papiros. En el terreno de las Matemáticas el mundo egipcio no ha sido explorado con asiduidad. En castellano apenas se dispone de algunas pocas obras divulgativas que, con todo el respeto que merece cualquier intento de aumentar el conocimiento del lector, no parecen suficiente para el nivel e interés que está alcanzando la Egiptología en España. Los libros generales sobre Historia de las Matemáticas no muestran, con contadas excepciones, un gran interés por los desarrollos conseguidos por culturas anteriores a la griega, por lo que dedican pocas aunque interesantes páginas a Egipto[2]. Sea porque las Matemáticas en Egipto se estudian dentro del marco más amplio de la Antigüedad[3] o porque se adopte un deliberado estilo divulgativo que excluye la profundización[4], lo cierto es que finalmente no se dispone en castellano de una obra amplia y específica sobre esta temática.

Como se dice habitualmente del tratamiento de la economía egipcia, los egiptólogos no son expertos en estos campos tan específicos (Economía, Matemáticas) y los matemáticos no son más que egiptólogos aficionados, en el mejor de los casos. Esta división del conocimiento engendra una casi invencible pobreza en el momento de analizar las Matemáticas construidas por la civilización egipcia. Los egiptólogos (de nuevo con excepciones: Peet[5], Robins[6], Gillings[7], entre otros) son poco capaces de profundizar en las relaciones matemáticas y en su interrelación con la construcción de este tipo de conocimientos mientras que los matemáticos tienden a centrarse en el desarrollo de su propia ciencia aislándola de todo contexto social, económico, religioso y cultural en el sentido más amplio.

Este libro tiene dos propósitos fundamentales y, consiguientemente, dos aportaciones que hacer. El primero es el de proporcionar al lector español un texto amplio y lo más riguroso posible de los logros principales alcanzados por los escribas egipcios al emplear instrumentos y procedimientos matemáticos. El segundo objetivo es el de profundizar en la estrecha relación propia de aquella cultura entre las necesidades económicas del antiguo Egipto y las Matemáticas utilizadas que, en no pocos casos, sería imposible entender de forma cabal sin apelar al contexto económico en el que nacen.

Para cumplir estos dos propósitos el libro tiene una estructura determinada. Tras un análisis esquemático de los tres marcos (geográfico, administrativo y económico) que tienen una mayor incidencia en la construcción de las Matemáticas egipcias, los restantes capítulos exponen los diversos aspectos matemáticos en relación a las necesidades económicas que tratan de resolver. De esta forma, el cálculo de áreas está ligado a la medida de los campos inundados por el Nilo, las operaciones aritméticas elementales y la presencia de fracciones se estudian en relación a las actividades contables y fiscales que muestran los distintos papiros encontrados, el cálculo de volúmenes aparece imbricado en los problemas generados por la capacidad de los graneros, por la construcción de los monumentos, la proporcionalidad geométrica se muestra en la construcción de un canon artístico para la pintura y la escultura. En todo el desarrollo del libro es conveniente observar que, en lo que respecta a la cronología, se ha seguido a Serrano[8], mientras que el texto de los problemas encontrados en los distintos papiros matemáticos es una traducción de la reciente versión de Clagett[9].

Se suele caracterizar a menudo la matemática egipcia como empírica (surgida de la experiencia) y la estructura y enfoque de esta obra parece favorecer esta interpretación. Es indudable (y espero que se observe así a lo largo de sus páginas) que los conocimientos matemáticos surgen efectivamente en la resolución de problemas prácticos de la vida económica y administrativa de la época. En ese sentido el contexto es un elemento esencial para la comprensión de la actividad matemática del escriba egipcio. Pero diversos procedimientos y problemas que el escriba plantea en sus papiros y que parecen tener por objetivo el favorecer una práctica del aprendiz para la resolución de problemas económicos, suponen la posible existencia de situaciones no ligadas inmediatamente a la experiencia. Tal es el caso, por ejemplo, de los problemas calificados como ‘pensar una cantidad’. Como intentaremos mostrar en el capítulo 9 estos problemas, como los de progresiones, están relacionados con la práctica que debía realizar el aprendiz de escriba en torno a los repartos desiguales de raciones. Pero su objetivo y sus procedimientos se alejan de la experiencia inmediata para desembocar en métodos numéricos de un carácter indudablemente abstracto.

En todo caso, el propósito fundamental de este libro no es tanto especular sobre la naturaleza de las matemáticas egipcias como exponer sus contenidos y tratar de explicar sus procedimientos. Finalmente, se va a intentar generar interés en el lector por aquellos conocimientos, en este caso matemáticos, que llegaron a construir unos hombres que hace mucho que desaparecieron, de una civilización de la que quedan tan pocos restos que permitan conocer cómo hicieron las cosas, cómo crearon un conocimiento al que hoy nos podemos acercar con grandes limitaciones pero con un profundo interés. Porque quizá no sea mala idea seguir el consejo del faraón Hety a su hijo Merikaré:

> “Imita a tus padres y a tus antepasados... Mira, sus palabras quedaron fijadas en los libros. Abre, lee y copia [su] sabiduría... [La vida] en la tierra pasa. No es larga. Afortunado aquel de quien se guarda un [buen] recuerdo”[10]

Notas

1 Serrano, J.M. (1993): “Textos para la historia Antigua de Egipto”, p. 270.
2 Kline, M. (1992): “El pensamiento matemático de la Antigüedad hasta nuestros días”, vol. I; Colette, J. (1985): “Historia de las Matemáticas”, vol. I; Boyer, C.B. (1986): “Historia de las Matemáticas”, entre otros.
3 Gheverghese, G. (1996): “La cresta del pavo real”, o Maza, C. (2000): “Las Matemáticas en la Antigüedad y su contexto histórico”.
4 Sánchez, A. (2000): “Astronomía y Matemáticas en el Antiguo Egipto”.
5 Peet, T.E. (1923): “The Rhind Mathematical Papyrus”.
6 Robins, G. y Shutle, C. (1998): “The Rhind Mathematical Papyrus”.
7 Gillings, R.J. (1972): “Mathematics in the Time of the Faraons”.
8 Serrano, J.M. Op.cit, p. 90.
9 Clagett, M. (1999): “Ancient Egyptian Science. A source book. Vol. III.
10 Serrano, J.M. Op. cit, p. 90.

Ahmose, el maestro de los números

A modo de prólogo y homenaje

Hoy los jóvenes olvidan con mucha facilidad. Piensan que Isis se levanta sólo para ellos y que los dioses nacieron cuando ellos lo hicieron. Al igual que mi maestro Ahmose, yo sí recuerdo. Me gustaría contar de ello pero mis estudiantes, cada vez más escasos, se ríen por lo bajo y luego salen alborotados camino de la ciudad de las cien puertas. Prefiero vivir apartado, fuera de ella, cerca del desierto. Alimentarme de algunas hierbas que produzco en un pequeño huerto, de aquello que me traen mis estudiantes regularmente. Bajo hasta el gran río y allí contemplo el atardecer cada día. Veo a los hombres remando, las mujeres que portan cubos de agua, cestos de productos, algunas me saludan y dicen: “¿Cómo ha ido el día, viejo Besenmut?, ¿los chicos aprenden o ya no sabes enseñar?” Me río con ellas porque sé que en el fondo soy una parte de su paisaje a esas horas, también de sus vidas, por poco que sea.

Los jóvenes no quieren recordar otros tiempos que para mí están presentes. Sólo tienen palabras para el joven Amenhotep, vida y salud para él por siempre. Muchos desean ir a ese valle nuevo donde el hijo de Horus desea ser enterrado junto a todos los reyes que vengan después. Quieren calcular las excavaciones, llevar los registros de los trabajadores, su manutención, calcular volúmenes de tierras, el tiempo que se tardará. Me dicen: “Ahí está el futuro, viejo maestro, allí hay que trabajar”. Y yo les respondo que deben aprender mucho todavía, que deben sentarse tiempo aún sobre sus tobillos para dibujar los trazos aún torpes de las palabras y los números. Ellos agachan la cabeza pero se dan codazos y piensan que soy débil, que me manejan. Tal vez tengan razón. Ya son muchos mis años, el sol alumbró muchas veces sobre mi cabeza llena de pelo blanco.

Cierro los ojos y recuerdo a mi maestro Ahmose. En su último tiempo, antes de su detención, era tan viejo como yo lo soy ahora. Seguía teniendo el brazo fuerte para dar a sus alumnos con la caña en las espaldas, el ceño fruncido, un permanente mal humor. Gritaba: “¡No sabéis nada, creéis conocer los números y sus misterios pero os contentáis con palabras huecas y resultados inciertos!” Cuando los jóvenes se iban se sentaba en su rincón, sobre la estera, y se tomaba un cuenco de agua. Una tarde se volvió hacia mí de repente para decirme:

“Besenmut, escúchame. Mi tiempo se acaba... No, calla y escucha. He dado todo por mi rey Auserre, le he proporcionado un gran número de escribas bien preparados a lo largo de los años, he dirigido algunas obras suyas, me he significado como un amigo al que siempre protegió, a despecho de las envidias de otros. Estuve a su lado desde mis años mozos y hasta que pasó al reino de las sombras, cuarenta años después. Sus sucesores son débiles y no saben sostener la obra que él cumplió aquí en Ávaris, la capital que levantó, la mayor ciudad del Bajo Egipto. Auserre fue un gran rey, el primero en llevar este nombre plenamente egipcio. Lejos quedaban los tiempos en que los reyes hicsos trajeron sus ganados desde la península del Sinaí para establecerse aquí, todos creíamos que para siempre.

Gocé de la confianza del hijo de Horus, asistí a su admiración por el pasado de esta tierra, su deseo de emular a aquellos antiguos reyes que levantaron sus pirámides sobre la llanura de Gizah y Saqqarah. Siempre tendió la mano a los vecinos del Alto Egipto, esos reyes guerreros que le respondieron con bravatas y desafíos, codiciosos como han sido siempre de la riqueza de la que disfrutamos en el Delta. Tebas, la lejana Tebas, hogar podrido de hombres infectos y ambiciosos, luchadores tenaces que no se han conformado con la convivencia entre ambas tierras. Auserre les dejaba llevar su ganado hasta aquí, les ofrecía bienes, riquezas, trigo, papiros de la mejor calidad y nada de eso les bastaba porque siempre han querido estas tierras”.

“Ahora soy viejo, Besenmut” –continuó-, “tan viejo que no puedo recordar mi origen apenas. El rey tebano Kamose y ahora su hijo Amosis no quieren negociar y nuestros reyes son débiles, ya te lo he dicho, quieren ceder y ceder sin contrapartidas. Todo lo perderán y, siguiendo los tebanos su naturaleza, entrarán a sangre y fuego, quizá destruyan Ávaris para volver con la cabeza del último rey hicso en una lanza. Cuando llegue ese momento, ya cercano, quiero darte instrucciones”.

Protesté, aduje que la situación no era tan grave, que quizá hubiera alguna posibilidad... Creo que no me escuchaba. Fue al arcón de los papiros, su más preciado tesoro, y lo abrió diciéndome que me acercara.

“Mira, Besenmut, he aquí la obra de mi vida. Todo lo que he hecho en la soledad de mi trabajo hace largos años, la base de lo que enseñé a mis estudiantes, entre ellos a ti. Ahí explico la forma de curar todas las enfermedades, y sobre todo el modo de hacer que los números tengan vida. Mira, lee...”

Así lo hice. “Razonamiento exacto para averiguar las cosas y su conocimientos, sus misterios, todos los secretos. Este escrito es del año real 33, mes 4 de akhet, bajo la majestad del Rey del Alto y Bajo Egipto, Auserre, vida y salud, a partir de una copia antigua”. Lo fuimos extendiendo sobre el suelo y quedé maravillado. Había cuarenta, quizá cincuenta papiros cosidos a mano por la parte ancha de manera que alcanzaba varios codos de longitud. El recto de ese papiro inmenso registraba todos los resultados de las partes de raciones cuando había dos de esas raciones. Recordé lo que me enseñó de joven: “Besenmut, escucha. Tienes dos panes y quieres repartirlos entre tres hombres, ¿qué haces? Te lo diré. Divides cada pan por la mitad, de manera que das una mitad a cada hombre pero te queda una mitad por repartir ¿verdad? Pues entonces divides esa mitad en tres partes iguales, de manera que quedará una sexta parte de ración para cada uno. De este modo”, escribía sobre mi ostraca, “dos tercios es lo mismo que medio y sexto". Yo decía: “Sí, maestro, eso es fácil, pero yo quiero saber más”. Sonreía antes de responderme: “Todo a su tiempo, joven impaciente, una cosa detrás de otra”.

Ahora tenía delante de mí esa misma igualdad tal como él me la dibujaba en mi ostraca pero detrás se acumulaban muchas otras que me enseñó después. Pasé el dedo y descubrí otras nuevas, halladas con medios desconocidos. “Maestro”, dije, “¿y esto?”. “Ah, Besenmut, no me dará tiempo a enseñártelo todo porque mi tiempo se acaba. Sólo quiero que me obedezcas en una cosa: Cuando mi cabeza penda de un hilo, coge todos estos papiros y vete lejos, marcha a Tebas. Tú no estás manchado con fidelidades ajenas y los nuevos dominadores necesitarán gente sabia como tú ya lo eres".

La tarde duerme hace tiempo cuando subo trabajosamente la cuesta que me separa de mi humilde casa. Nunca quise riquezas, desprecié los honores de los hombres, los mismos que llegaron un día para prender a mi maestro, los que le arrastraron hacia el río para acabar con él. Asciendo jadeante hacia mi hogar como si dejara atrás tantos años de fatigas, el miedo, el temblor con que abrazaba el saco de los papiros, escondido tras unas palmeras, la casa de Ahmose ardiendo en la noche, las llamas iluminando mi cara asustada.

He contado esta historia tantas veces que mis estudiantes se burlan. He hablado de Ahmose con la unción que se debe a los sabios que fueron, los que habitan para siempre el cielo de los dioses. Sólo he encontrado sonrisas y aburrimiento. ¿Quién te recuerda, viejo maestro?, le digo algunas noches, ¿quién, cuando pasen tantos cientos de años, sabrá de ti? Del amor que tuviste a los números, de su misterio insondable que supiste desvelar. A veces veo a mis estudiantes, ya transformados en escribas, utilizando sus métodos, los que mi maestro me legó, esas cifras auxiliares en rojo que todo lo resuelven. Les veo y me asoman las lágrimas porque me acuerdo de su figura camino de la muerte, cómo volvió la cabeza para mirarme y yo le dije sí, con la cabeza, y grité: "¡Maestro, vivirás para siempre!", hasta que un soldado me amenazó desde la distancia y huí como loco, llorando asustado, camino de Tebas.

Sevilla, 12 de abril de 2001

Capítulo 1
El marco geográfico

El río Nilo

Hacia el décimo milenio antes de nuestra era comenzó en todo el entorno del río Nilo un proceso de desecación que fue convirtiendo las selvas en desiertos. Diversos restos líticos atestiguan la existencia de grupos humanos que, paulatinamente, fueron retirándose al amparo del gran río. Entre los milenios octavo y quinto, cuando el Paleolítico deja paso al Neolítico en esta zona, estos grupos se han convertido en seminómadas, de manera que la caza y la pesca conviven con el cultivo de la cebada, el trigo y el lino, así como con la domesticación de animales como la cabra y el asno[1].

Para todos ellos el gran río será fuente de vida, tanto por satisfacer la sed y el hambre (la pesca) como medio de limpieza. Se han encontrado asentamientos en el norte, en el oasis de el Fayum (un gran oasis a poco más de cien kilómetros del río) y en algunos lugares del Delta[2] (Merimde beni Salameh, en el lado oriental). Allí el río se divide en numerosos brazos sin que pueda distinguirse un curso principal. Es, por ello mismo, tierra fértil donde los cultivos podían fructificar fácilmente y la tierra cultivable se extendía por kilómetros. Pero también más al sur se desarrolla la cultura Badariense en la que se encuentran restos procedentes del Sinaí (turquesas, cobre) e incluso del actual mar Rojo (conchas). Si a ello añadimos el hecho de que los cultivos y la domesticación de animales tiene una previsible relación con influencias asiáticas podemos hacernos a la idea de grupos humanos que, asentados por lo general, no dudaban en conservar una importante faceta nómada, sea en busca de pastos o caza, que los ponían en relación con su entorno.

El río es una presencia constante y necesaria. Los asentamientos están todos cercanos a su curso (salvo los que tomaban como base un oasis) y de esta manera el que luego sería llamado Nilo se va constituyendo, con la extensión de los desiertos a uno y otro lado, en el eje vertebrador de la cultura egipcia. “Es evidente”, dice Herodoto en el siglo V dC, “con sólo verlo, que el Egipto al que los griegos llegan por mar es para los egipcios tierra adquirida y un don del río”[3]. En el tiempo de este historiador Egipto tiene el aspecto actual, una más o menos estrecha franja de tierra cultivable en ambas márgenes del río, salvo en el Delta cuyos brazos extienden la fertilidad hasta perderse la vista en el horizonte. Esta parte, tan distinta de la que rodea su cauce en más de mil kilómetros anteriores, se ha conocido tradicionalmente como Bajo Egipto. Apenas 150 kilómetros desde el comienzo del Delta hasta el mar Mediterráneo. En el resto, el llamado Alto Egipto, la extensión de tierra cultivable alcanza pocos kilómetros desde el río. Se puede navegar por él admirando los verdes cultivos de las orillas, las palmeras enhiestas a varios cientos de metros para observar poco después que, de modo abrupto, se alzan pequeñas colinas que anuncian la presencia de un desierto inhóspito y estéril.

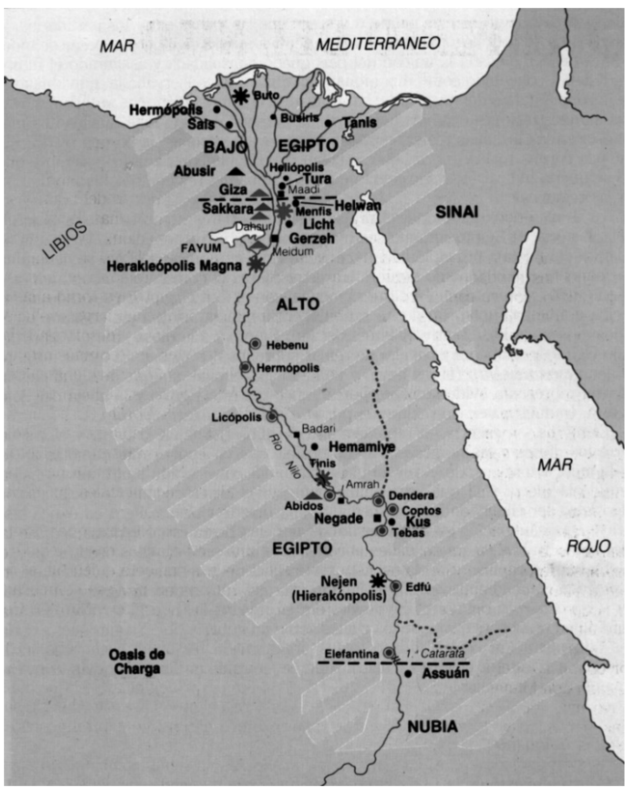
El río que conocieron los egipcios de las primeras dinastías del Imperio Antiguo llegaba hasta una catarata (la primera) en Asuán, unos 1500 kilómetros por los que discurría entre meandros hasta el mar. Más al sur de esta catarata se extendía una pobre región habitada por los nubios. Allí el río quedaba encajonado entre elevaciones del basamento cristalino, grandes rocas graníticas que reducían a pocos metros la tierra cultivable en ambos márgenes.

Diversos objetivos comerciales, entre los que destacaba la explotación de los yacimientos de oro de esta región, hicieron de ella una zona de permanente expansión de los egipcios. La primera catarata en Asuán consistía en una serie de rápidos fáciles de navegar, complicándose la tarea más adelante con la aparición de nuevas cataratas (hasta seis en total) algunas de las cuales merecieron la construcción de vías fluviales alternativas por parte de los faraones. Tras la sexta catarata en Sabaloqa el río se ha extendido 1.500 kilómetros más y se llega a la que luego sería colonia inglesa de Jartum (actual capital de Sudán), límite de la penetración egipcia en la Antigüedad. Cerca de este punto el Nilo Blanco procedente del Lago Victoria se ve incrementado de manera importante por el Nilo Azul, su principal afluente, que proveniente del lago Tana en Etiopía trae consigo su aportación fundamental: Un limo de gran riqueza mineral que es arrancado de las tierras volcánicas etíopes.

La inundación

> "¡Salve, Hapy, (tú) que has surgido de la tierra, que has venido para dar la vida a Egipto!" cantan los egipcios en el Imperio Medio al dios origen de las aguas del Nilo, "Leche del Alto Egipto que irriga los campos, Creación de Re para vivificar a todo el que padece sed... Que provee de alimentos, grande de provisiones. Que produce todos los bienes, señor de la crecida, Señor de los peces"[4].

El agradecimiento de los egipcios se corresponde con la realidad. Hacia el mes de junio el río comenzaba una crecida en la primera catarata que un mes después llegaba hasta el Delta. El río, que pasaba en breve tiempo de un caudal de 200 a otro de 10.000 m^3 por segundo, se desbordaba de su cauce anterior anegando las tierras resecas de sus márgenes. A partir de octubre las aguas descendían paulatinamente de nivel dejando, sin embargo, una tierra enriquecida por el limo fluvial. Es por ello que los propios egipcios llamaban a sus terrenos fértiles "La Tierra Negra" en contraposición con "La Tierra Roja" con la que denominaban el desierto que se extendía más allá de la primera.



Antiguo Egipto

Cuando el agua se retiraba llegaba el momento de sembrar en la tierra aún humedecida de manera que para febrero, cuando comenzaba el período de más fuerte sequía, los cultivos habían madurado y se recogían poco después. Tras la siega el terreno se resecaba y al agrietarse conseguía una ventilación que impedía su salinización. De este modo se podía esperar con expectación la llegada de una nueva crecida pocos meses después.

Este ritmo periódico del trabajo del campesino unido a la necesidad de unificación en la distribución del tiempo por parte de una administración centralizada, condujo a que los primeros calendarios de carácter lunar fueran sustituídos en una fecha imprecisa por un calendario apoyado en el distinto curso del río[5]. De esta manera el curso del año solar se dividía en:

1. Estación de *Akhet* (Inundación), desde junio hasta octubre.
2. Estación de *Peret* (Cosecha), desde octubre hasta febrero.
3. Estación de *Shemu* (Sequía), desde febrero hasta junio.

Cada una de estas estaciones se dividía en cuatro meses de tres semanas cada uno. Como cada semana esta formada por diez días, cada mes resultaba de treinta días. Esta distribución permitía fechar los sucesos que se narraban en tumbas y estelas. De esta manera "Año 1, cuarto mes de la estación akhet, día 2" indicaría el primer año de reinado del nuevo faraón (con cada uno de los cuales empieza una nueva cuenta), terminando la estación de la Inundación (ya que es su cuarto mes) y el día correspondiente entre los treinta de dicho mes.

Con todo lo dicho el año solar llegaba a los 360 días. Eso arrojaba un desfase que se compensaba añadiendo cinco días más que fueron denominados "epagómenos" por los griegos. De este modo el año solar de 365 días sólo presentaba un error de un cuarto de día con el verdadero año solar. Este hecho no dejaba de ser notado por los egipcios. En los primeros tiempos se observó la coincidencia del comienzo de la crecida vivificadora con la ascensión de la estrella Sirio lo que dio lugar a una interpretación religiosa de dicho fenómeno. Sin embargo, con el paso de los años la coincidencia dejaba de serlo a razón de un día cada cuatro años por lo que la antigua interpretación perdía su valor, situación que no fue corregida durante el tiempo de los faraones.

El caudal de la crecida no era totalmente regular. Si el aumento de nivel del río en la primera catarata discurría en condiciones razonables entre los seis y ocho metros de altura, menos de seis representaba una feroz hambruna de cuyas referencias están salpicadas las inscripciones en las tumbas de la nobleza egipcia. Más de ocho significaba la destrucción de los diques construidos para canalizar las aguas del río, el ahogamiento de los animales en sus cercados, la destrucción de las casas de adobes[6]. Por ello canta el egipcio a la inundación:

"(Cuando) falta, se obstruyen las narices
Todo el mundo se empobrece
Se reducen las ofrendas a los dioses
Y perecen millones de hombres"[7].

Dada la importancia de preveer este nivel la administración egipcia construyó diversos 'nilómetros' tanto en Asuán (primera catarata), como en Menfis (en el comienzo del Delta) y otros lugares. Estos nilómetros eran una especie de pozos en las orillas del Nilo a los que se accedía por una escalera y que en una de sus paredes mostraba una serie de medidas o niveles alcanzables por el río Nilo. Era de tal importancia este registro que en la llamada Piedra de Palermo, una losa de diorita procedente de Menfis que registra en forma de anales los sucesos más importantes de las primeras dinastías, aparece una continua referencia al nivel observado en el Nilo. Así, para el reinado de Atothis (presumiblemente el faraón Aha, hacia el 3.000), se menciona al mismo nivel la probable unión del Alto y Bajo Egipto y el nacimiento de los hijos del rey con el nivel alcanzado por las aguas:

> "[Año 1 de su reinado]. Cuarto mes, día 13. Unión de los Dos Países. Circuito del Muro. 6 codos. [Año 3]. Nacimiento de dos hijos del Rey del Bajo Egipto. 4 codos, un palmo"[8].

Las labores administrativas no acababan con dicha medida, naturalmente. En condiciones normales el agua de la crecida podía ser encauzada hacia zonas más alejadas por medio de la construcción de canales que irrigaban una mayor amplitud de tierras ganando espacio al desierto. Esta labor era de gran importancia y constituía un motivo de orgullo para aquél que se encargaba de su construcción. Así, en su tumba de Gizah un arquitecto del faraón Pepi I (VI dinastía, hacia el 2300), proclama:

> "El Compañero Único, Arquitecto Real, Ankh-Meryre-Meryptah, dice: Yo soy [un constructor para] el Rey Meryre, mi señor. Su majestad me envía [para dirigir todos sus trabajos] y yo [actúo] para satisfacción de su majestad en el Bajo y el Alto Egipto... porque él me juzgó más eficaz que cualquier otro arquitecto real que su majestad había enviado previamente al distrito del dominio real. Su majestad me envió a 'planear' el canal del Camino-de-Horus y excavarlo... Su majestad me premió con ello: me dio 'pendientes' de oro y pan y cerveza. Grande era la alabanza de su majestad para mí para lo que él me había enviado"[9].

La administración del agua era fundamental para garantizar la riqueza y aprovechamiento de la inundación y, con ello, la fertilidad del suelo y la abundancia de cosechas. Por todo lo cual, las inscripciones en las tumbas de nobles de todos los períodos de la historia antigua de Egipto abundan en referencias al agua, junto a las más estereotipadas de "Dar de comer al hambriento y dar vestido al desnudo". En la autobiografía de Hety I, un nomarca de Asiut durante el Primer Período Intermedio (2350 - 2008), prácticamente borrada actualmente de su tumba, se podía leer:

> "Reacondicioné un curso de agua de diez codos, para el que excavé en tierras de labor, y establecí una compuerta... Hice un canal para esta ciudad, mientras que el Alto Egipto pasaba apuros y el agua no se veía... Hice que las aguas de la inundación cubrieran las viejas colinas. Hice que las tierras de cultivo [quedaran irrigadas], en tanto que todos los vecinos pasaban sed. [Cada uno] tuvo agua de la inundación a placer"[10].

El entorno geográfico

Una de las características más destacadas de la tierra egipcia es el aislamiento geográfico y cultural en que parece haber vivido muchos siglos, precisamente aquellos en los que se formaron sus instituciones y creencias más específicas. Este hecho es más resaltable por el contraste que supone con las distintas culturas radicadas en Mesopotamia que, expuestas a muy distintas influencias y presiones, hacen de la confrontación política, económica y religiosa un escenario habitual. Egipto, en cambio, no. Diodoro Sículo, escritor del siglo I aC, afirma que:

> “al oeste está fortificada por el desierto de Libia, lleno de bestias salvajes... y que, en razón de su escasez de lluvia y carestía de cualquier tipo de alimento hace el paso por él no solo penoso, sino incluso altamente peligroso”, para continuar hablando de Nubia, “Además, por el sur, la misma protección es proporcionada por las cataratas del Nilo y las montañas que la flanquean pues... no es fácil navegar por el río ni viajar por tierra”[11].

En efecto, al oeste se extiende lo que hoy se conoce como desierto líbico. Sin embargo, la primera referencia a la tribu de los libu se encuentra bajo el reinado de Mineptah[12] (1213 - 1204). Anteriormente se constata la presencia de dos pueblos, los tehenu y los chemehu, que tratan de introducirse en tierras egipcias ante el avance de la desertización progresiva de su territorio. Ya en tiempos de Esnofru (2625 - 2585) se contemplan ataques preventivos contra estas tribus[13] que serán más agresivos en tiempos de Amenemes I (1938 - 1909). Precisamente el faraón encontrará la muerte por un complot palaciego cuando su hijo Sesostris, el primero que pasará a la historia con este nombre, se encuentra combatiendo a las tribus del oeste. La constancia de esta amenaza continúa, como se ha comentado, hasta los tiempos de Mineptah que hace escribir en una estela:

> “El país de los timihiu está destrozado ..., y el terror permanece para siempre en el corazón de los mashauash. Él hace retroceder a los libios, que habían [osado] mirar a Egipto; un gran temor, a causa de Egipto, habita en sus corazones”[14].

Tampoco por el sur recibirá Egipto ataque importante alguno aunque sí se verá obligado el faraón a domeñar distintas rebeliones que irán surgiendo en la pobre tierra de Nubia. Como se ha comentado anteriormente, la primera catarata en Asuán fue una primera frontera natural de Egipto. Un estrechamiento de las paredes del granito rojo tan abundante y apreciado por los constructores egipcios transforma el río en una sucesión de rápidos que no costaba demasiado vencer. Tras ella se extendía hasta la segunda catarata en Wadi Halfa, ya de mayor dificultad, la que se conocía como la Baja Nubia, un territorio angosto donde no es extraño que el desierto llegue hasta la misma orilla del río. Desde tiempos predinásticos, en lo que se conoce como cultura de Nagada (hacia el 3200), se observa una relación étnica y cultural entre ambos lados de la primera catarata que nunca fue una frontera efectiva. Los intercambios comerciales entre las tribus de la Baja Nubia y los egipcios persistieron durante un tiempo como se muestra en la tumba de Herkhuf, hijo de un nomarca de Elefantina (cerca de la primera catarata). A las órdenes del faraón de la VI dinastía Merenre I (2387 - 2377), relata una serie de viajes al país de Iam (pasada la segunda catarata) del siguiente modo:

> “La Majestad de Merenre, mi señor, me envió con mi padre, el Amigo Único, el sacerdote lector Iri, hacia el país de Iam para explorar los caminos de aquella región. Yo cumplí la misión en siete meses y traje todo tipo de productos, hermosos y raros. Fui recompensado generosamente por aquello”,

especificando más adelante el fruto de otro de sus viajes:

> “Descendí entonces con 300 asnos cargados de incienso, ébano, aceite *hekenu*, granos *sat*, pieles de pantera, colmillos de elefante, numerosos boomerangs y toda clase de cosas bellas y de valor”[15].

Las expediciones comerciales advirtieron de la riqueza de aquellos lugares, lo que indujo al gobierno centralizado de los faraones a organizar incursiones armadas. Cuando las minas de oro en territorio de Egipto se agotaron la presencia del dorado metal en las arenas nubias condujo a la colonización sistemática a partir de la tercera dinastía (2675 - 2625).

Las tribus nubias serían así empujadas hacia el sur en un proceso que caracteriza toda la historia egipcia hasta la ocupación completa en el Imperio Nuevo. Ello dará lugar a rebeliones, como antes se ha mencionado, pero también a un proceso de asimilación por las tribus nubias del modelo cultural egipcio. Las primeras serán repelidas con dureza como muestra una estela de Sesostris III (1837 - 1818)[16], cuando afirma exultante que:

> “Yo he establecido mi frontera más al sur [que la de] mis padres. He incrementado lo que se me había legado”,

para continuar tratando con desprecio al vencido:

> “Es un auténtico cobarde el que es arrojado de su frontera, porque el nubio escucha [sólo] para caer ante la palabra; responderle es hacer que se retire; si uno le ataca, ofrece la espalda; si uno se retira, tiende a atacar. No son gente digna de respeto, son miserables de corazón cobarde”.

Por el este las amenazas sobre tierra egipcia fueron más concretas. Deberemos distinguir a ese respecto la franja de Palestina y el Sinaí del desierto que se extiende al sur de esta región hasta lo que conocemos como Mar Rojo. Mientras que por el oeste Egipto se defendió de los molestos ataques de las tribus empujadas por la desertización del Sahara y por el sur se tendió a colonizar Nubia para asegurarse su riqueza comercial y, en particular, el suministro de oro, la actitud ante la franja del Sinaí será distinta. No existe colonización sino puestos militares avanzados que deben garantizar el libre tránsito comercial de las caravanas egipcias. La población autóctona es marcadamente tribal y seminómada (como se describe en la leyenda de Sinuhé) pero no carece de ciertas riquezas dadas por la ganadería y el comercio y son capaces de organizarse para atacar intereses egipcios.

Durante el Imperio Antiguo los egipcios penetran profundamente en el Sinaí en busca de riquezas minerales (cobre, turquesas) pero también como tránsito hacia zonas que posteriormente se transformarán en protectorados egipcios (Biblos y lo que hoy en día es la costa libanesa) así como escenarios de confrontación con los imperios asirio e hitita más adelante. Con el rey Esnofru se asiste ya a diversos enfrentamientos con los beduinos del Sinaí que tratan de impedirle el paso hasta las costas asiáticas del Mediterráneo en busca de madera (sobre todo el cedro del Líbano) con la que construir su flota y de la que tan carente estuvo siempre Egipto. Esta agresividad se incrementó en la dinastía VI, cuando el Imperio Antiguo entraba en una crisis que se manifestaba en la escasez de recursos materiales. Lo cierto, sin embargo, es que las tribus del Sinaí siempre supusieron un gran peligro para los egipcios. Con Mentuhotep II (2008 - 1957) los beduinos se habían instalado en el borde oriental del Delta, amenaza a la que se enfrentó poco después Amenemes I (1938 - 1909), construyendo una serie de fortificaciones conocidas como el Muro del Príncipe. La importancia de esta acción para un Egipto que deseaba recobrar el antiguo esplendor se aprecia en las palabras atribuidas al sacerdote Neferty que, refiriéndose, a este faraón, profetizará:

> “Se construirán los Muros del Príncipe para prohibir a los asiáticos alcanzar Egipto; mendigarán agua como suplicantes para permitir beber a s ganado.Entonces Maat [Verdad-Justicia] retornará a su sitio, mientras el caos será desterrado”[17].

Esta amenaza, sin embargo, persistirá como se muestra por la invasión de los hicsos, al final del Imperio Medio y cuya derrota y expulsión sólo será posible con un resurgimiento del poder tebano, antes en declive.

Más al sur de esta franja se extendía el desierto y, aún más allá, el Mar Rojo. Hasta llegar a él era necesario atravesar las arenas interminables y montañas que a veces se elevan más de mil metros. No obstante, algún intercambio comercial esporádico se registra ya desde la dinastía V en el Imperio Antiguo entre Egipto y el llamado país de Punt, probablemente la costa etíope frente al actual Adén. En los tiempos de Mentuhotep III (hacia 1960) el funcionario del monarca, Henu, graba en las rocas del Uadi Hammamat (el camino que comunicaba con el este a través del desierto) unas autoalabanzas donde menciona la expedición comercial que comandaba:

> “El tesorero del Rey del Bajo Egipto, el Amigo Único, el intendente Henu dice: Mi señor me ha enviado para conducir unos navíos *kakenyt* hacia la región de Punt, a fin de traerle el incienso fresco que está en poder de los príncipes, señores del desierto, gracias al miedo que suscita el rey en todos los países extranjeros... Me he puesto en camino con un ejército de 3.000 hombres”[18],

y para apreciar los ingentes trabajos que son necesarios ante tan numerosa expedición, añade:

> “he convertido el camino [tan como] el río, [he transformado] la tierra roja en campos fértiles; he dado, en efecto, cada día a cada uno un odre y un cesto de pan, dos cántaros de agua y veinte panes... Además, he excavado doce pozos en una zona de matorrales, dos pozos en Idahet, uno de 20 codos de profundidad y otro de 30".

Tales penalidades no eran extrañas en las expediciones fuera de la tierra egipcia pero parecían particularmente penosas en este viaje a Punt que no vuelve a repetirse hasta la conocida expedición propiciada por la reina Hatsheput (1478 - 1458) que inscribe en su templo funerario de Deir el-Bahari.

Conclusiones

Desde el punto de vista geográfico, dos características destacan dentro del desarrollo de la civilización egipcia: Su articulación en torno al río Nilo y el aislamiento respecto a otras culturas de igual nivel en su entorno, particularmente las que tenían lugar en tierras mesopotámicas. El progresivo avance del desierto sahariano hacia el oeste fue desembocando en el asentamiento de grupos humanos cerca del río, creadores de diversas culturas dentro del Neolítico egipcio. Eran culturas seminómadas que, junto a la pesca y la caza, se iniciaban ya en el cultivo de cereal y lino, fundamentalmente, así como en la ganadería de cabras y asnos, a los que se unirían después las vacas, los bueyes y los cerdos.

Estos grupos se asientan sobre todo en el norte, en el Delta del río que se conocerá como el Bajo Egipto, aunque otras culturas se desarrollan más arriba en el cauce, en el terreno más árido llamado Alto Egipto. Se constituye así una naciente y múltiple cultura fluvial que se va acomodando al ritmo de las crecidas del Nilo: Un período de inundación al que debe seguir el tiempo de la cosecha y, posteriormente, un período de sequía que, nuevamente, es interrumpido, por otra inundación. Este ciclo periódico constituye, además del fundamento de su calendario en tiempos posteriores, la base de su agricultura y, por ende, de la organización comunal que requería la construcción de diques y canales.

Por unos y otros motivos se va constituyendo una organización monárquica que tiene por objetivo la unión de las dos partes físicamente diferenciadas de Egipto. Probablemente, este objetivo no hubiera podido ser cumplido sin el aislamiento que la geografía otorga al territorio egipcio. Frente a un mar Mediterráneo de difícil navegación por entonces, el avance del desierto sahariano por el oeste traerá una amenaza constante pero siempre contenida de diversas tribus que huían a través de la franja mediterránea y del desierto.

Al sur, las diversas cataratas del Nilo daban paso a unas tierras pobres y con gran escasez de recursos agrícolas aunque abundantes de oro en sus extensiones desérticas. Ello motivó, desde los primeros períodos dinásticos, una expansión egipcia hacia Nubia, primero de carácter comercial y, luego, guerrero para concluir con una colonización de la zona y la asimilación de la población autóctona respecto a la cultura egipcia.

El lugar más conflictivo en la política exterior egipcia fue siempre la franja costera que se extiende al este, el desierto de la península del Sinaí en la que tribus seminómadas vivían de su ganadería y del comercio. Los egipcios buscaban allí diversos yacimientos minerales y el paso necesario para comerciar por tierra (siempre más seguro que el mar) con la costa libanesa en la que encontrar la madera de calidad que les era imprescindible para la construcción de barcos. Y hemos de recordar a este respecto que el Nilo no sólo era una fuente de riqueza agrícola sino la principal vía de comunicación en una tierra que, una vez unida bajo el gobierno de los faraones, se extendía en una estrecha franja a los largo de 1.500 kilómetros. Estas tribus de la península del Sinaí fueron un obstáculo permanente para dicho comercio además de una amenaza importante que terminaría de concretarse con la invasión de los hicsos durante el Segundo Período Intermedio. Además, la expansión hacia las costas asiáticas mediterráneas conduciría al contacto con otras culturas (asirios, hititas) y a la alternancia de períodos bélicos y de paz prolongada que transformaron en parte la imagen que de sí mismos tenían los egipcios.

Notas

1 Urruela, J. (1988): “Egipto: Época Tinita e Imperio Antiguo”.
2 SanMartín, J. y Serrano, J.M. (1998): “Historia Antigua del Próximo Oriente”.
3 Lara, F. (1991): “El Egipto faraónico”, p. 33.
4 Serrano, J.M. (1993): “Textos para la hitoria Antigua de Egipto”, p. 48.
5 Clagett, M. (1995): “Ancient Egyptian science”. Vol. II.
6 Wilson, J.A. (1953): “La cultura egipcia”.
7 Serrano, J.M. Op. cit, p. 48.
8 Lara, F. Op. cit. p. 35.
9 Lichteim, M. (1988): “Ancient Egyptian autobiographies chiefly of the Middle Kingdom”, p. 12.
10 Serrano, J.M. Op. cit. p. 45.
11 Ibid, p. 41.
12 Gardiner, A. (1961): “El Egipto de los faraones”.
13 Padró, J. (1996): “Historia del Egipto faraónico”.
14 Lara, F. Op. cit, p. 173.
15 Serrano, J.M. Op. cit, p. 76.
16 Ibid, p. 173.
17 Lara, F. Op. cit, p. 82.
18 Ibid, pp. 74-75.

Capítulo 2
El marco administrativo

La figura del faraón

Se suele considerar a la sociedad egipcia como eminentemente estática, agrupada en torno a la figura de un faraón de autoridad indiscutida, con una organización burocrática a su alrededor que permanece básicamente inmutable a lo largo de los siglos. Por ello, quizá la primera sorpresa del lector más interesado en estos temas proviene de observar las discontinuidades en la historia del antiguo Egipto, los períodos (breves, ciertamente) en que la estructura social del reino se conmueve, en que “el país está girando, como hace el torno del alfarero”, al decir de un testigo del Primer Período Intermedio. Y aún, como veremos a continuación si se comparan los tiempos de mayor estabilidad monárquica, cómo la propia figura del omnipresente faraón cambia y se transforma manteniéndose, pese a ello, una base común, un nexo entre las distintas imágenes del faraón que otorgan esa aparente estabilidad a la historia egipcia.

Siguiendo a un autor anterior, Assman[1] diferencia entre las sociedades “calientes” que tienen una necesidad constante de transformación y las sociedades “frías” que hacen de la continuidad de sus instituciones el objetivo que les permite vencer y superar el paso del tiempo y los devenires históricos. Es obvio, que a partir de la idea de “progreso” que surge en el siglo de las Luces, la nuestra es una sociedad primordialmente “caliente” mientras que la egipcia antigua, en su intento de conservación e imitación constante de las antiguas estructuras sociales, es sobre todo “fría” pero, como también señala Assman, toda sociedad comparte (en distinto grado, ciertamente) ambos aspectos. La diferencia entre nuestro tiempo y el aquí estudiado hace más difícil de comprender un modelo de sociedad tan distinto y puede conducir a observar los cambios históricos allá donde los egipcios de la época no veían cambio significativo alguno. Y ello es porque toda narración histórica es, a fin de cuentas, una interpretación de la misma.

Así pues, hemos de fijarnos en primer lugar en aquellas instituciones gubernativas y administrativas que permanecen incólumes a lo largo del tiempo aunque, al tiempo, con mirada actualizada examinaremos los cambios históricos habidos y que, probablemente, no fueron percibidos como tales por los propios egipcios.

La forma de gobierno a lo largo del largo período de tiempo estudiado es la monárquica y, dentro de ella, un gobierno absoluto del faraón. Las sucesivas crisis habidas, la dudosa legitimidad ocasional en la sucesión de dinastías, no disminuyeron nunca la importancia cultural del gobierno del faraón. Sin embargo, su figura ofreció al menos tres imágenes distintas con el discurrir histórico, imágenes que sucediéndose en el tiempo se superpusieron entre sí conviviendo con facilidad en las creencias egipcias de la época. Son las siguientes:

1. El faraón como dios e hijo de dios en la tierra.
2. El faraón como buen pastor de su pueblo.
3. El faraón como héroe y guerrero victorioso.

Dado que cada una de ellas puede asociarse con más fuerza a un determinado período histórico un análisis de la forma que adquirieron en la sociedad egipcia supondrá una breve revisión de la historia del antiguo Egipto.

La naturaleza divina del faraón

La unión del Alto y el Bajo Egipto fue un hecho alcanzado, al parecer, en el período predinástico. Hay constancia[2] de una división previa entre las dos partes de la tierra egipcia, la primera teniendo como base Hieracómpolis (que, finalmente, parece haber sido vencedora) y la segunda radicada en Buto, ciudad del Delta. Se suele cifrar en el rey Narmer la unión de ambas tierras teniendo en cuenta que en su famosa paleta de piedra aparece con las coronas y símbolos tanto del Alto como del Bajo Egipto. Con el rey Menes se construye la capital que, denominada como “Muro Blanco” es conocida históricamente como Menfis, ciudad situada estratégicamente en el punto geográfico de encuentro entre ambas partes de Egipto.

Siendo tierras distintas por sus características geográficas e incluso de gobierno dicha unión no debía ser sencilla de mantener en los primeros tiempos. De hecho la tensión entre la unión y la desunión perviviría a lo largo del tiempo lo que se traduce en un mantenimiento formal de las diferencias desde el punto de vista administrativo: La existencia de un Doble Granero, de un Doble Tesoro, por ejemplo o, ya en el terreno religioso, la construcción de dos tumbas por determinados reyes posteriores cerca de Menfis (la capital, al norte) como en Abidos (lugar de enterramiento real tradicional, al sur).

El Nilo unía como vía de comunicación ambas tierras pero resultaba necesario, para mantener dicha unión desde el punto de vista social, la figura de un rey gobernante que estuviese por encima de su adscripción terrenal a una de las partes (Alto o Bajo Egipto). Mientras en otras sociedades de la Antigüedad los primeros reyes pasaban a mitificarse como héroes semidivinos el proceso de divinización de los monarcas egipcios fue algo más lento y elaborado a lo largo del Imperio Antiguo.

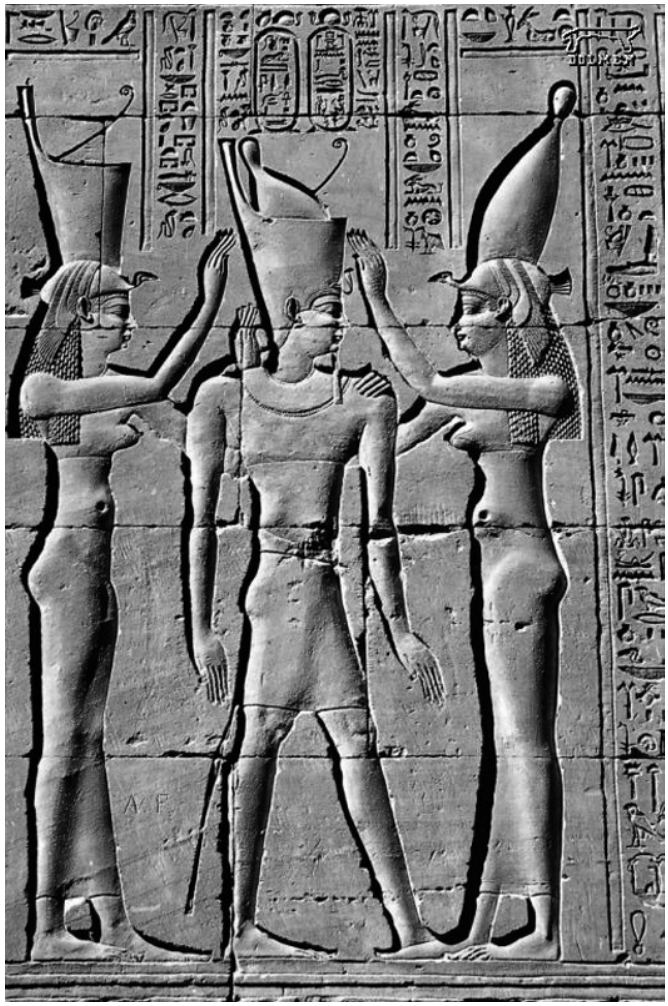
La que para nosotros pueda ser una ambigüedad entre la naturaleza divina del faraón (un dios en la tierra) y su naturaleza humana (hombre que, aún hijo de dios, será juzgado por Osiris tras su muerte), no parecía serlo para el egipcio común.

> “El faraón es un hombre, pero su función es divina o, dicho de otra forma: es un hombre en el rol de un dios. Pero también es sacerdote, es servidor de los dioses, les representa ante toda la humanidad..., lo especial del faraón es que, a diferencia de los demás hombres, es ya dios como ser vivo, el ‘dios sobre la tierra’, por así decirlo”[3].

Dada su naturaleza divina el faraón no había de responder ante los hombres y, al tiempo, todo era suyo: la tierra, el agua del Nilo, los hombres... Tan sólo estaba sujeto, por así decirlo, a la ley del Maat, una noción traducible como Justicia, Verdad, Orden universal (en contraposición al Caos). Pero no era, en principio, una ley que le fuera impuesta sino que él venía a ser la encarnación de Maat que, a fin de cuentas, formaba parte consustancial de su naturaleza divina.

Una de las consecuencias más llamativas de esta concepción divina del rey es la construcción de las conocidas pirámides, particularmente las erigidas con tanto esfuerzo y la inversión de tantos medios humanos y económicos, en la meseta de Gizah. El faraón era propietario del terreno donde se levantaron, de las piedras que sirvieron a la construcción, del Nilo por donde navegaron hasta su destino, del derecho de trabajo sobre los hombres (la denominada "corvea") por la que les sustraía de los campos (que, a fin de cuentas, también eran suyos) para que trabajaran en la construcción.

Ya para entonces, el faraón recibía títulos significativos: "*Horus*", dios del cielo en forma de halcón que todo lo ve; "*Nebti*", que se refiere a las dos diosas protectoras del Alto y Bajo Egipto; "*Nombre áureo*" que simboliza el material de que están hechos los dioses; "*Nesut-biti*", rey del Alto y Bajo Egipto. Eran representaciones de su carácter divino y de la autoridad de que estaba investido sobre ambas tierras. Naturalmente, su autoridad se ejercía en todas partes pero resultaba inevitable hacerlo de manera interpuesta. Nunca se escribió una ley en forma de código que afectara al conjunto de los hombres, entre otras cosas porque no se podía entender que algo (una ley humana) limitara la acción de un dios. De manera que sólo se encuentran los llamados decretos reales, órdenes que incluyen nombramientos, designaciones reales y también lo que hoy consideraríamos leyes. Habitualmente la justicia la impartían determinados subordinados representando al rey pero respetando, por lo general, las costumbres locales. El almacenamiento de grano, la recaudación de tasas, la conservación de archivos reales y demás funciones administrativas que conllevaba el gobierno sobre una extensión tan extensa de tierras eran tareas encomendadas a diversas figuras administrativas y ejecutivas (visires, cancilleres, mayordomos, etc.) pero siempre en nombre del rey. El culto a los dioses era tarea exclusiva del faraón pero los sacerdotes lo rendían en las distintas ciudades del país en nombre del faraón.



Precisamente las pirámides que eran la muestra del poder alcanzado por el rey apoyado en su naturaleza divina señalaron también el declive de este gobierno absoluto. Los conocidos faraones de la cuarta dinastía Queops y Quefrén construyeron grandes pirámides de hasta 146 metros de altura, gigantismo que fue declinando en faraones posteriores (como es el caso de Micerino). Con la quinta dinastía los faraones añadieron a sus nombres el título de "*Hijo de Re*" lo que indica dos cosas: Que el culto a Re (dios-sol de Heliópolis, ciudad sagrada) crecía en importancia y que, paralelamente, disminuía la del faraón, ahora denominado como hijo de un dios, no como el mismo dios. Ello se tradujo en la construcción obligada, en relación a la pirámide, de un templo solar que en muchas ocasiones alcanzaba unas dimensiones mayores que la propia pirámide del faraón. Naturalmente, estos templos debían ser dotados por el rey con bienes que aumentaban el poder del clero.

Se multiplicaron así las dotaciones de tierras a los templos con las que mantener el culto que llevaban a cabo un número importante de sacerdotes, crecieron las exenciones de impuestos que el faraón les concedía, y con ello la autonomía administrativa de los templos era cada vez mayor. Tierras que antes producían para el gobierno del faraón iban pasando a un clero cada vez más independiente. La economía de un gobierno centralizado había, pues, de resentirse.

La primera crisis

La carestía en la recaudación de impuestos por parte del gobierno faraónico parece que intentó compensarse con la elevación de las tasas sobre las administraciones territoriales, los que posteriormente se llamaron nomos. Su origen es incierto puesto que hay datos de la existencia de divisiones territoriales en tiempos predinásticos pero no se sabe si son las mismas unidades administrativas de las que hay constancia en el Imperio Antiguo. En todo caso, la cuarta dinastía documenta ya el nombramiento de "gobernadores de un nomo". Estos nomarcas tenían en la dinastía V unas funciones concretas: Director de la gente del rey, Encargado de los asuntos del Rey, Director de las ciudades nuevas[4]. Aunque más tarde alcanzaran una gran independencia administrativa, su función principal siempre se asentó en racionalizar el uso del agua, como manifiesta el importante nomarca de Assiut durante la IX dinastía Actóes II:

> "El canal de diez codos estaba obstruido; hice excavar para él sobre los campos de cultivo... [Sustenté] la vida de la ciudad; era un contable con el grano, era uno que daba agua al mediodía para ... [Yo suministré agua] en el distrito de la región montañosa. Hice un canal para esta ciudad del Medio Egipto en la [montaña], que no había visto el agua... Convertí el país montañoso en una marisma. Hice que el agua del Nilo inundase [las zonas desoladas]"[5].

A medida que el poder del faraón disminuía crecía el de los nomarcas que, a fin de cuentas, cada vez recibían menos del gobierno centralizado y estaban obligados a hacer más por sí mismos (el almacenamiento de grano, la distribución de agua, la dotación de hombres para las empresas del rey, etc.). Uno de los detalles que se ha revelado más significativo sobre las relaciones de poder entre el faraón y sus gobernadores territoriales es el hecho de que, en determinado momento, los nomarcas pasaron de ser enterrados en la capital y residencia principal del rey (Menfis) a hacerlo en sus propias ciudades dentro del nomo que gobernaron. Independientemente del hecho de que sus tumbas eran cada vez más lujosas (lo que revela un enriquecimiento progresivo), el lugar de enterramiento era de una gran importancia. Dado que los encargados de velar por el culto al fallecido eran los hijos y familiares del mismo, construir su tumba en el propio nomo indica que los cargos de nomarcas pasaron a ser hereditarios y que los hijos que debían rendir culto residían como gobernadores en dicho nomo.

Si el cargo era hereditario (y parece que fue así desde la VI dinastía) ya no era fundamental el nombramiento del faraón si bien daba legitimidad a una situación *de facto*. Con ello, los nomarcas fueron independizándose en sus decisiones del gobierno centralizado del faraón, crearon sus propias administraciones al modo de dicho gobierno y adoptaron incluso determinados usos y costumbres antes reservados a la familia real (uso de diademas, desposamiento de varias mujeres legítimas, por ejemplo).

En esta situación en que los nomos empiezan a desarticularse entre sí y de cara al gobierno central, empiezan a sucederse dinastías que, partiendo del gobierno de nomos, aspiran a restaurar la legalidad asumiendo de forma débil el papel del faraón. La misma sociedad se descompone hasta extremos que nunca llegaremos a conocer pero de los que ha quedado un testimonio en las palabras de Ipu-ur, probablemente un aristócrata menfita víctima de los acontecimientos:

> "Mira, los nobles se lamentan; los pobres se regocijan. Cada ciudad exclama: '¡Expulsemos al poderoso de entre nosotros!'... Mira, Elefantina, Tinis... del Alto Egipto, sin pagar impuestos a causa de la contienda. Falta el grano, el carbón de

> leña, la fruta-irtyu, la madera-maau, la madera-nut, los arbustos. Se echa en falta el trabajo de los artesanos... ¿Para qué [sirve] un tesoro sin sus impuestos?... Mira la Cámara Privada, sus escritos han sido robados, y han sido revelados los secretos que [allí] había... Mira, se han abierto los archivos, y han sido robados sus inventarios. Los esclavos han sido convertidos en señores de esclavos. Mira, [los escribas] son asesinados, y sus escritos robados. Mira, los escribas del catastro, sus escritos han sido destruidos"[6]

Hemos resaltado, dentro de estas largas lamentaciones, los aspectos de descomposición (y hasta desaparición) de la administración centralizada: No se pagan impuestos, no se encuentran materias primas necesarias, los secretos guardados en los archivos (el catastro que permite los impuestos, las fórmulas de cálculo, etc.) son robados y asesinados sus propios autores, los escribas. Sea o no una realidad fidedigna el cuadro trazado por Ipu-ur todo hace indicar la existencia de una desvertebración del gobierno egipcio rayana en la revolución social.

El faraón como buen pastor

La autoridad del faraón se ha debilitado. El Caos ha invadido el Orden en que Egipto había vivido tantos siglos bajo el gobierno del faraón, hijo de Re. ¿De quién puede ser la culpa sino del propio faraón que ha desoído la voz de Maat?.

> "Autoridad, Conocimiento y Verdad están contigo, y sin embargo es la confusión lo que difundes por el país, junto con el ruido del tumulto... Esto significa que tu acción es lo que originó eso. Tú has hablado falsamente..."[7]

le espeta con rudeza Ipu-ur. ¿Cómo se puede hablar así a un dios, un hijo de dios en la tierra?. En cambio, se habla de esta manera al hombre que ha despreciado el Maat, a un hombre que se coloca al mismo nivel que los demás hombres y se equivoca como ellos. A medida que los nomarcas ganan en importancia y algunos de ellos aspiran incluso al título de faraón, queda claro que el rey debe adoptar otro papel hacia su pueblo, un pueblo que sufre el desgobierno, las hambrunas, los canales de agua obstruídos, las guerras entre los nomos. El propio Ipu-ur apunta la respuesta:

> "Mirad, ninguna de las dignidades [oficiales] está en su sitio, como un rebaño descarriado sin pastor"[8].

El faraón debe ser un pastor que ame a su pueblo, que sea justo con él, que no le oprima, que le proporcione alivio a sus necesidades. Su naturaleza divina se manifestará en su seguimiento de la ley de Maat a la que estará sujeto. Es por ello que, en la X dinastía, el faraón Jety (Actóes IV) se dirije a su hijo Merikaré para aconsejarle sobre el gobierno de Egipto poco antes de que, con Mentuhotep II, el poder del nomo tebano, se imponga a todos los demás inaugurando el Imperio Medio:

> "Imita a tus padres y a tus antepasados... Mira, sus palabras quedaron fijadas en libros. Abre, lee y copia [su] sabiduría. El que es enseñado se convierte en un

experto”[9]

en lo que constituye un guiño a la tradición faraónica del Imperio Antiguo, esa autoridad del faraón que se había perdido. Y continúa:

> “No seas malvado; la clemencia es buena. Haz tu monumento duradero por amor a ti. Multiplica al pueblo, enriquece a la ciudad... Practica la justicia y perdurarás sobre la tierra. Apacigua al que llora; no oprimas a la viuda; no apartes a un hombre de las posesiones de su padre. No dañes a los nobles en sus posesiones. Guárdate de castigar equivocadamente...”[10].

El faraón como héroe victorioso

La invasión del pueblo hicso al final del Imperio Medio supuso un serio golpe para la noción que Egipto tenía de sí mismo y del gobierno del faraón. Actualmente se considera que dicha invasión fue más paulatina de lo que las indignadas declaraciones de los egipcios de la época permitía sospechar. En consecuencia, si no existió una violenta y puntual invasión es de suponer que el asentamiento y gobierno hicso en el Delta debió ser contemporáneo con una debilidad del gobierno egipcio y de las capacidades civiles y militares del faraón.

Por primera vez Egipto, que se había enfrentado a ataques dispersos desde el oeste, a rebeliones en Nubia y a algunos descalabros en el Sinaí, prontamente corregidos, se encontraba con un pueblo ‘asiático’ asentado en su territorio y que se atrevía a asumir el puesto de faraón y los ornamentos y protocolos reales. Todo parece indicar que durante unos cien años los habitantes del Alto Egipto asistieron impotentes al gobierno hicso sobre el Bajo Egipto llegando incluso a cierto grado de convivencia, como revela la Tablilla Carnavon, cuando el Consejo real egipcio aduce razones para no atacar a los hicsos:

> “Estamos tranquilos gobernando nuestro Egipto. Elefantina es fuerte, y la mitad [del país] está con nosotros, hasta Cusae. Los [más] llanos de sus campos son cultivados para nosotros, y nuestro ganado puede estar en las marismas [del Delta]”[11]

En esta tablilla se asiste al diálogo entre aquellos que prefieren asegurar el *statu quo* manteniendo Egipto dividido entre dos formas de gobierno que convivan entre sí (los asiáticos al norte, los egipcios al sur) y el rey Kamosis que rechaza este consejo y se autoproclama futuro vencedor de los asiáticos yendo hacia ellos como un “halcón”, dirigiendo hombres como “leones”. Se va configurando así la respuesta que Egipto dará a esta ocupación extranjera de territorio egipcio, a la amenaza exterior constatable en la franja del Sinaí: Tras los hicsos será el reino de Mittani, luego los hititas y más tarde los Pueblos del Mar los que harán tambalear de nuevo el gobierno faraónico.

El faraón ya no va a apelar a la bondad y a la justicia, pese a que siga fiel al Maat, sino que exaltará el valor, el heroísmo, la épica de la guerra victoriosa. A lo largo de todo el Imperio Nuevo los faraones comenzarán sus reinados con guerras que, sean o no victoriosas (como en el caso de Ramsés II), permitirán proclamar la potencia del rey, su valor. Algunos de los reyes pasarán a la historia como grandes guerreros. Tal es el caso de Tutmosis III (1479 - 1425) a quien una estela se dirige poniendo las palabras en la boca del dios Amon-Re:

> “Te concedo el valor y la victoria sobre todos los países; instalo tu poder y el temor a ti en todas las tierras, tu respeto hasta el límite de los cuatro pilares del cielo... Hago que tus enemigos caigan bajo tus sandalias, [para que] pisotees a los rebeldes y a los adversarios, ya que te he otorgado la tierra en toda su extensión, estando sometidos a tu autoridad [tanto] los occidentales [como] los orientales. Tú hollas todos los países, con tu corazón lleno de gozo”[12].

De nuevo el faraón se veía investido con el poder y la autoridad de los antiguos monarcas. Lo que aquellos consiguieron por su naturaleza divina lo obtenían los nuevos faraones con su poder militar y su valor personal. Eran amados del dios Amón-Re que permitía que su fuerte brazo abatiera a todos los enemigos. Pero ello obligaba precisamente al principal beneficiario (el propio faraón) a mostrar un espléndido agradecimiento al dios que lo permitía y le favorecía.

Se asiste así a un incremento de los templos que alcanzan una grandiosidad sin precedentes: Luxor, Karnak, Medinet-Habu, las construcciones ramésidas todas otorgan grandes templos al culto del dios Amón. Tales construcciones debían ser dotadas espléndidamente y, si bien ello no tenía un coste importante en los tiempos de mayor dominio faraónico sobre el entorno geográfico, se revelaban un lastre insoportable para el faraón cuando los tiempos fueran más pacíficos (tal como sucedió en relación a los imperios asiáticos imposibles de doblegar). Con ello el poder del clero empezó a crecer. Los templos aumentaban la autonomía administrativa que les permitía dirigir sus amplias posesiones al tiempo que el faraón se veía cada vez más incapacitado para atender otras necesidades. Aspectos cíclicos que, desde otras circunstancias, volvían a repetirse en la historia egipcia.

Las propiedades del faraón

Dado que la tierra egipcia es un don divino y el faraón es un dios o el hijo de un dios sobre la tierra, es inmediato admitir que el faraón es el propietario de toda la tierra de Egipto. Sin embargo, su utilización de la misma cobra, ya desde el Imperio Antiguo, formas variadas como las siguientes:

1. La Gran Casa.
2. Los complejos funerarios.
3. Los dominios funerarios.
4. Los dominios reales.

La Gran Casa comprendía todos los palacios ocupados por el rey, sea para funciones de gobierno, protocolo o con carácter residencial. Dada la movilidad que en muchos casos tenía el faraón existía un número amplio de tales palacios repartidos a lo largo del curso del Nilo, particularmente en la capital elegida dentro de cada reinado. No han pervivido por construirse con adobe y ser éste perecedero. Tan sólo han quedado restos en la capital de Akenathón, la hoy conocida como Tell el-Amarna que, abandonada precipitadamente tras la muerte de su fundador, fue conservada en sus cimientos por la arena del desierto.

Estos palacios tenían su propia administración puesto que era necesario suministrar alimentos, bebidas, tejidos y todo lo necesario para la vida y el protocolo del faraón y su familia. Un personal adjunto integrado por peluqueros, médicos, cocineros y demás servidores facilitaban la vida cotidiana.

La piedra y la madera en la construcción se reservaban para la construcción de la tumba, la morada eterna del faraón. Lo que comenzaron siendo mastabas se transformaron en pirámides a lo largo de la cuarta dinastía para, más tarde, ser hipogeos. Sin embargo, el complejo funerario en que se integraban las tumbas fue siempre más amplio incluyendo inicialmente palacios funerarios y, durante la mencionada cuarta dinastía, dos templos asociados a cada pirámide y unidos por una calzada procesional. No bastaba con ser enterrado en una pirámide colosal. Resultaba imprescindible garantizar un culto funerario que facilitase el alimento y la atención debida al ka del faraón. Para ello se construían los templos junto a las pirámides. Pero estos templos debían ser provistos de ofrendas de manera sistemática y, para garantizar el culto debido, precisaban de un grupo de sacerdotes que precisaban ser alimentados y vestidos.

Durante la cuarta dinastía estas necesidades no eran tan grandes pero, como se ha comentado líneas arriba, durante la quinta dinastía se añadió a la tumba un templo solar que, a su vez, estaba unido por una calzada procesional con otros dos templos para el culto, uno presidido por un altar solar y el otro por un obelisco que apuntaba hacia el mismo astro. Cuando llega el Imperio Nuevo, los templos alcanzan unas dimensiones nunca vistas, su número crece sin cesar así como, paralelamente, sus necesidades para el culto, el cuidado de los mismos y el alimento de un número elevado de sacerdotes. Baste comparar el hecho de que el templo funerario de Nefernikaré Kakai, en la quinta dinastía, requería el trabajo de unos 200 hombres (profetas, sacerdotes, empleados, etc.) mientras que los documentos conservados de tiempos de Ramsés III indica que sólo en el templo de Medinet Habu podría haber más de 600 personas dedicadas al culto de dicho templo.

Es el faraón, el propietario de la tierra de Egipto, quien es responsable de satisfacer estas necesidades. Porque además la propiedad exclusiva tiene sus contrapartidas. En concreto, le acarrea la obligación de cuidar de su pueblo, procurar que esté alimentado. Es lo que se ha llamado la función “nutricia” de la realeza[13]. De ahí que en aras de dicha función y para satisfacer las demandas de los templos creados para el obligado culto a los muertos, se articulen una serie de ‘donaciones’ de dicha tierra con la constitución de ‘dominios funerarios’. Estos podían estar constituidos por poblaciones previamente existentes cuya producción se destinaba a la manutención del templo y sus ocupantes pero, generalmente, eran extensiones de tierra provenientes de los ‘dominios reales’, tierras del faraón que se asignaban para la constitución de lo que se denominaron ‘fundaciones piadosas’.

Las fundaciones eran, como se ha dicho, extensiones de tierra (incluyendo hombres y animales) que no era imprescindible que estuvieran agrupadas. El conocido templo de Amón durante el período ramésida disponía de decenas de campos en distintos nomos cuyos rendimientos, no obstante, se centralizaban en el templo tebano de Karnak. La distinción inicial entre complejo funerario (asociado al culto del faraón muerto) y fundación piadosa (teniendo por objetivo el culto de los dioses) se desvanece con el paso del tiempo.

Además de todo lo dicho, el faraón disponía de una serie de tierras, los ‘dominios reales’, para su uso particular, el de sus esposas y su familia, regidas por un Mayordomo real. Uno de ellos, Rediu-Khnum, se expresa así durante el Imperio Medio:

> “Yo crecí bajo los pies de su majestad desde mi juventud más temprana. Así ella [la reina Nefrukayet, esposa del faraón] supo la excelencia de mi realización y mi fidelidad a los oficiales. Entonces ella me puso en Dendera en la gran granja del

> ganado de su madre, rica en registros, una empresa adelantada, la más grande propiedad de Egipto Superior.
> Yo me he pasado un tiempo largo, muchos años, sin que hubiera allí una falta mía, porque mi competencia era grande. Yo la reorganicé para que su dirección fuera mejor de lo que había sido antes. Yo restauré lo que encontré deteriorado; reparé lo que encontré roto; llené lo que yo encontré faltando. Yo no descuidé cualquier fiesta que se celebrara en esta propiedad. El sacrificio estaba asegurado para todas las ofrendas diarias. Cada fiesta era realizada en su día, para el beneficio por siempre de mi señora Nefrukayet.Yo administré la propiedad con éxito. Agrandé todas sus secciones"[14]

De estas propiedades provenían algunas de las tierras dadas en donación a los templos e incluso, según la época, a particulares que habían prestado algún importante servicio a la corona, sea por su carácter de nobles y cargos de confianza del faraón o, como en el Imperio Nuevo, militares que eran premiados así por su esfuerzo en las empresas bélicas tan frecuentes en ese tiempo.

Todas estas formas de ejercer la propiedad real sobre la tierra conllevaban el establecimiento de relaciones administrativas y económicas de cierta complejidad que constituyen el marco en el que se desarrollaba la vida cotidiana de los egipcios.

¿Había lugar para la propiedad privada? Ciertamente, la crisis del primer Período Intermedio dejó en manos de los nomarcas la propiedad efectiva de la tierra y la utilizaron del mismo modo que los faraones previamente: Crearon fundaciones, disfrutaron de dominios propios, etc[15]. Pero cuando la dinastía XI de origen tebano inaugura el Imperio Medio se inicia un proceso paulatino de vuelta a la propiedad anterior que culmina con Sesostris III (Dinastía XII), de nuevo propietario efectivo de toda la tierra de Egipto.

Sin embargo, existen datos escasos pero irrebatibles de la existencia de algún tipo de propiedad privada. Los papiros de Hekanakthe, correspondientes a la dinastía XI, muestran a un propietario de tierras que envía mensajes a su hijo sobre la compra y la venta de tierras. Diversas donaciones a particulares vienen a redundar en lo mismo: Existía un uso particular de la tierra que, recibido como donación del faraón por lo general, permitía transmitirlo por herencia e, incluso, arrendarlo a otras personas, aunque los datos son muy escasos en este sentido. Sí está documentado, en cambio, este sistema de arriendo de las tierras de los templos a cambio de una parte de la cosecha. En resumen,

> "El rey concede la tierra en beneficio a los nobles, incluso permitiendo su transmisión y su vinculación familiar...; dota patrimonialmente a sus funcionarios con donaciones más o menos precarias; dona a los templos y a las instituciones religiosas lucrándolas doblemente con el privilegio de la exención de impuestos, etc. Los beneficiarios, a su vez, celebran contratos con colonos y aparceros para su explotación, etc... Sobre el suelo se superponían, pues, una multiplicidad de derechos de disfrute más o menos plenos, cuya última referencia dominical es el faraón mismo"[16].

La función ejecutiva del gobierno faraónico

La amplitud de la tarea de gobierno sobre una tierra tan extensa condujo al nombramiento de diversos cargos que actuasen en nombre del faraón. El principal de todos fue el de visir. Las funciones de este verdadero hombre de confianza durante el Imperio Nuevo son bien conocidas por las inscripciones encontradas en la tumba del visir Rekhmiré en las que se narran las recomendaciones hechas por el faraón Tutmosis III en el nombramiento del primero, con una detallada relación de sus funciones y la mejor manera de ejercerlas. Así, tras especificar el protocolo que debe asumir un visir, el faraón añade que

> "Le están encomendados los asuntos que se refieren a las Fortalezas del Sur y del Norte. También, todas las cosas que salen y entran en la Casa Real, mientras que, para todo lo que sale y entra de la Corte es su mensajero el que cuida de la entrada y de la salida.... Entra además para informarse acerca de la salud del Señor y en su palacio se le informa diariamente de los intereses de las Dos Tierras"[17].

Así pues, era un cargo de extrema confianza ya que implicaba una salutación matinal (interesándose por la salud del rey) y un informe diario sobre las gestiones e intereses faraónicos en todo Egipto o, al menos, en el territorio donde ejercía su cargo el visir (desde el Imperio Medio solía haber dos, uno para el Alto y otro para el Bajo Egipto).

> "Se presenta ante él cualquier testamento y es él quien lo sella. Le corresponde la transformación de las fincas en feudos. En lo que se refiere a cualquier demandante que diga 'Nuestras lindes han sido quitadas', se deberá inspeccionar lo que se halla bajo el sello del funcionario correspondiente y en base a esto reponer lo quitado por el Consejo que hizo variar las lindes... Es él quien nombra al [gobernador] de todos los nomos y es él quien le escucha. El envía a los soldados y a los escribas del catastro para que lleven a cabo los servicios del soberano. Los actos relativos a cualquier división administrativa deben quedar reservados a su oficina, para que pueda juzgar sobre cada campo. Le corresponde a él marcar los límites de todo nomo, de todo pasto, de toda fundación piadosa y de cualquier tipo de acuerdo. Escucha las respuestas en caso de litigio y se le atribuye cualquier nombramiento referente a la Sala del Juicio"[18].

Aparecen aquí funciones de una importancia capital en el Egipto de la época. Es conocido que por entonces la crecida del Nilo borraba las lindes de los campos lo que, unido a las ambiciones de unos templos respecto de otros, de unos nomos entre sí, conducía a que las estelas que actuaban a modo de lindes fluctuaran de posición según la importancia o la fuerza de unos y otros, lo que daba lugar a todo tipo de reclamaciones. Era necesario, por tanto, recurrir a una entidad superior como era el faraón para que se revisara el catastro, las medidas realizadas antes de la inundación, se atendieran dichas reclamaciones y se llegara a una resolución justa. Todo ello era encargado al visir que, de forma más general, también ejercía funciones en los diversos tipos de juicios.

Pero aún es necesario constatar sus funciones en lo referente al Tesoro real:

> "Él es quien cuida de la recogida de los atrasos [impuestos] en la Capital meridional y en el Palacio, según lo establecido por la Casa Real... Abre el Tesoro con el Preboste y su sello. Cuida de las listas censales de los bovinos que deben censarse... Todo príncipe, jefe de aldea y cualquier particular acude ante él en

materia de tributos... Le corresponde la administración del país cuando el soberano está [ausente] en las expediciones”[19].

Este cargo de confianza fue en el comienzo del Imperio Antiguo asignado a un miembro de la familia real, particularmente un hijo del faraón. Sin embargo, con Micerino comienza a desligarse de estas relaciones familiares e incluso es posible el nombramiento de varios visires simultáneamente, aunque este hecho es de difícil determinación[20]. En el Imperio Medio, como sucederá en el Nuevo, comienzan a nombrarse dos visires dado que la monarquía tebana había establecido su capital (Menfis o List) en una ciudad diferente a la suya original y pretendían conservar el gobierno radicado en ambas localidades.

Desde la quinta dinastía las funciones de los visires atañían a unos campos que hemos visto ejemplificados en las instrucciones de Tutmosis III, si bien eran aún más amplios. Cinco en concreto se pueden señalar:

1. Director de los Seis Grandes Tribunales y encargado, por tanto, de la impartición de la justicia en su nivel más alto.
2. Director del Doble Granero, al cargo tanto del esencial almacenamiento de grano.
3. Director del Doble Tesoro, guardando el oro, la plata, el cobre y demás materiales preciosos, pero también el lino y otros productos que podían ser manufacturados.
4. Director de los Archivos Reales, y custodio por tanto de toda la información escrita que atañía al gobierno de Egipto (catastros, relación de impuestos, censos, propiedades y, en general, toda la información escrita que correspondía a los restantes campos de actuación).
5. Director de los Trabajos del Rey, es decir, las construcciones de canales, el levantamiento de obeliscos, templos, tumbas, etc.

La competencia del visir sobre estas áreas no quiere decir tampoco que su gobierno fuera directo sobre cada una de ellas. Podían existir encargados en cada una de ellas a las órdenes del visir (Cancilleres), cada uno de los cuales requería el trabajo de un grupo de escribas que contrataban trabajadores para que cumpliesen las tareas asignadas al director correspondiente. Se constituía así una trama burocrática y administrativa en referencia a estos campos de gobierno que daban lugar a nombramientos y carreras administrativas que aparecen reflejadas en las tumbas de los nobles, a veces con titulaciones que no corresponden a funciones específicas sino que parecen de carácter honorífico (como es el de Compañero Único, por ejemplo) y otras cuyas funciones son imprecisas y aún están en estudio[21].

> "El compañero del rey en sus marchas, agregado a los pasos del dios perfecto, que no se aparta del Señor del Doble País sobre los campos de batalla de todos los países del Norte, que ha franqueado la Gran Corriente [el Eúfrates] siguiendo a Su Majestad a fin de establecer las fronteras de Egipto, el primer heraldo del rey, el guardián de la puerta, que satisface al Señor del Doble País gracias a sus consejos, el heraldo del rey, Imaou-nedjeh"[22].

aparece escrito en una estatua de granito negro, cerca del templo funerario de Tutmosis III (faraón al que se refiere el texto citado). Se trata de un heraldo real que también muestra ser arquitecto a las órdenes del faraón:

> "El dice: La primera vez que fuí promovido [como] arquitecto del Señor del Doble País tuvo lugar en el año 15... Yo he inspeccionado el levantamiento de dos grandes obelicos que su Majestad ha hecho para su padre Amón. Yo he inspeccionado el levantamiento... [que su Majestad ha hecho] para su padre Atón, señor de Heliópolis, en la entrada del gran pilono doble que Su Majestad ha restaurado, cuando yo era el arquitecto".

Es éste un ejemplo entre muchos que muestran distintas actividades (en este caso el levantamiento de obeliscos) que podían corresponder al visir pero que, sin embargo, parecen depender directamente del faraón: El encargo de expediciones militares, comerciales o de búsqueda de materiales, construcciones de templos y barcas, apertura de canales, etc.

Todo ello da lugar a distintos nombramientos por el encargo real que supone, nombramientos que ennoblecen a la persona que les corresponde y que muestran orgullosos en la autobiografía que inscriben en las paredes de sus tumbas. Ello no quiere decir que el visir no interviniese, sino que el ennoblecimiento consiguiente sólo se refiere a la atención personal (cuando no a las compensaciones recibidas) del faraón.

La importancia del escriba

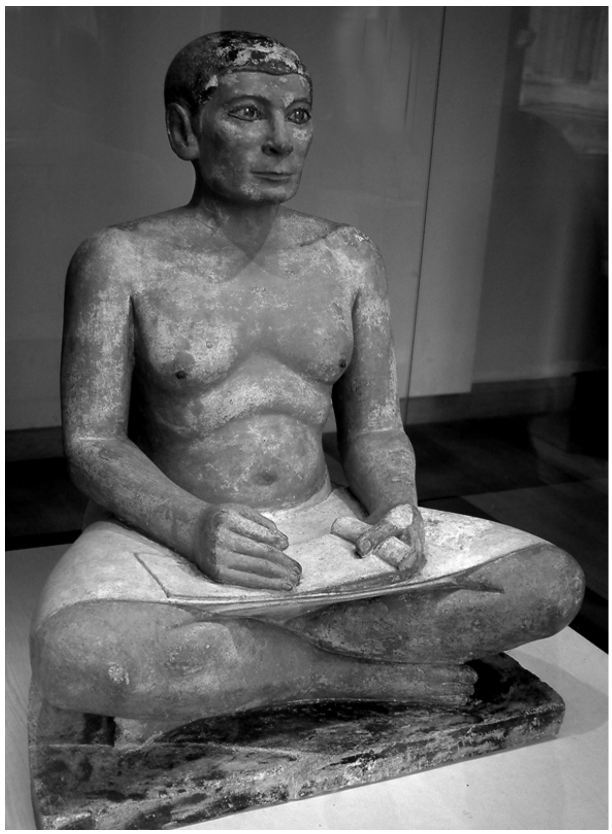
Se ha detallado el papel y el significado de la figura del faraón, fuente de legitimidad de todo acto administrativo y se analizaron posteriormente las funciones de varios cuerpos intermedios (visires, cancilleres, mayordomos, directores, etc.). Sin embargo, en la base de la administración egipcia estaba un nutrido grupo de escribas encargados de llevar a cabo las instrucciones de todos los anteriores.

La religión egipcia consideraba al dios lunar Thot el creador de la lengua y la escritura en las dos formas más habituales de la época dinástica: El jeroglífico, frecuente en las inscripciones sobre piedra, y el hierático, de carácter cursivo y más habitual sobre papiro por su facilidad de escritura con pincel. Es por ello que una de las invocaciones copiada por los escribas en sus escuelas está dirigida a Thot, tal como aparece en el papiro Sallier I:

> “¡Oh Thot, colócame en Hermópolis,
> tu ciudad, donde la vida es agradable!.
> Cubre mis necesidades de comida y cerveza, guarda mi boca [cuando] yo hable.

¡Que tenga a Thot detrás de mí el día de mañana! ¡Ven [a mí], palabra divina!”[23].

Efectivamente, la palabra es divina, es un verdadero don de los dioses. Pronunciar la palabra precisa permite que aquello nombrado surja a la vida, se diferencie de todo lo demás entre lo que está confundido. De ahí el poder de la palabra que pronuncia una categoría superior de escriba, el sacerdote lector, frente al cadáver del faraón en el proceso de momificación, el poder de los Textos de las Pirámides que se esculpían en las tumbas para acompañar al difunto en su camino hacia la barca de Osiris y el juicio de los dioses. El culto precisaba la palabra justa, la invocación precisa para conseguir que los dioses realmente escucharan al suplicante, al oferente. Es por todo ello que la labor de estos sacerdotes estuviera tantas veces más cerca del conjuro y la magia antes que de la simple lectura de un texto escrito.



La importancia de la capacidad de escribir y leer no es despreciable en una sociedad básicamente analfabeta. Sólo los escribas eran capaces de leer las inscripciones de las tumbas y dárselos a conocer a otros. Por ello Ja-em-Hat, Escriba Real y Supervisor del Doble Granero con Amenhotep III, escribe en la segunda sala de su tumba:

> “¡Oh vosotros, los escribas que desentrañais la lengua escrita, que comprendéis las palabras divinas, vosotros cuyo corazón se regocija penetrando en el conocimiento y que os satisfacéis por medio de los actos útiles!
> ¡Vosotros, que pasareis ante este monumento que yo he construido con el fin de ser un lugar de reposo que sirva a los bienaventurados; los que contemplaréis estos

> muros y pronunciaréis en voz alta mis palabras aquí escritas! Si tal hacéis, entonces el Rey del Alto Egipto os alabará y el Rey del Bajo Egipto os amará”[24].

La formación del escriba no era fácil y parece reservada para las clases más pudientes. La dificultad de la lengua egipcia debía implicar un aprendizaje algo tardío, lo que conducía a que sólo pudieran inscribirse en las escuelas de escribas los hijos que no se veían obligados a ayudar a sus padres en las duras tareas del campo, normalmente hijos de nobles o de otros escribas. De hecho, la condición de escriba se transmitía de padres a hijos con harta frecuencia, como se testimonia por las “firmas” de los escribas que autentifican un documento y en las que se citan como hijo y nieto de escriba.

La conocida “Sátira de los oficios”, un largo escrito en que un escriba de la dinastía XII alecciona a su hijo sobre las bondades del oficio de escriba al compararlo con otros más humildes, supone un ejemplo de su importancia social:

> “Mira, no hay una profesión que esté libre de director, excepto el escriba. El es el jefe. Si conoces la escritura, te irá mejor que en las profesiones que te he presentado. Míralos en su miseria... Mira, te he colocado en el camino del dios... Mira, no hay escriba que carezca de comida y de bienes de palacio”[25].

La importancia de los escribas no hizo sino crecer a lo largo de la historia egipcia. Mientras que en el Imperio Antiguo reducían su importancia a labores elitistas como las que hemos comentado anteriormente, la formación cultural de los egipcios en el Imperio Medio produjo un aumento de los escritos literarios y científicos ante una mayor demanda de una capa privilegiada de la población. En todo caso, la aplicación del cálculo sobre las tierras, los impuestos, los registros de las contribuciones y las ofrendas y demás labores administrativas siempre hicieron de los escribas un grupo imprescindible en el funcionamiento del gobierno del faraón.

Conclusiones

Egipto tuvo un gobierno basado en la figura del faraón, protagonista de un dominio absoluto de la tierra y los hombres que la habitaban. Sin embargo, la interpretación de esta figura por los propios egipcios fue cambiando con el tiempo, a medida que diversas crisis alteraban las iniciales relaciones entre el faraón y su pueblo. Así, durante el Imperio Antiguo se puede resaltar la naturaleza divina del rey, una naturaleza que le pone por encima de las disputas territoriales entre el Alto y Bajo Egipto que caracterizaron los primeros tiempos dinásticos. Dado que Egipto estaba a merced de los dioses, dueños de todo lo existente, el faraón, como dios o hijo de dios, era el propietario de toda la tierra. Ello le daba todos los derechos sobre la misma pero le obligaba, para servir la ley de Maat, a ser justo con su pueblo proporcionándole los medios de subsistencia necesarios.

Esta relación entre el rey y su pueblo se rompe cuando a la debilidad del faraón se le une la desintegración del territorio, emergiendo gobiernos locales a partir de los nomos, unidades administrativas básicas en la geografía egipcia. El debilitamiento del control que ejercía el gobierno centralizado da lugar a situaciones de hambre y necesidad cuya culpa puede achacarse al hecho de que el faraón se hubiera apartado de Maat. A partir de esto, la dinastía tebana emergente va adoptando una actitud tendente a reafirmar el papel del faraón como buen pastor de su pueblo, enfatizando su carácter humano y, por tanto, propicio a error.

Las invasiones asiáticas que caracterizan el final del Imperio Medio, probablemente como consecuencia de un nuevo debilitamiento del poder central, da lugar a la figura de un faraón que resalta su fuerza y poder militar con los que expulsar a los asiáticos o vencerlos en su terreno, más adelante: Una interpretación del faraón como héroe victorioso.

A través de estas vicisitudes queda prácticamente invariable el modelo administrativo con el que el faraón gobierna un territorio tan extenso. Se apoya para ello en el nombramiento de un Visir de amplios poderes, que actúa en su nombre y le informa de todas las decisiones que es necesario tomar en Egipto. El visir (que en muchos períodos conoció su desdoblamiento en dos, uno a cargo del Alto Egipto y otro del Bajo Egipto) articula su mandato en torno a varios campos: El Doble Granero, el Doble Tesoro, los Seis Grandes Tribunales, etc. en los cuales nuevos nombramientos de cancilleres vienen a constituir una estructura administrativa de naturaleza jerárquica y burocrática.

No obstante, es necesario resaltar la existencia de al menos dos aspectos que complementaban la acción del visir. En primer lugar, la existencia de actividades administrativas que parecen depender directamente del faraón (la organización de expediciones comerciales o militares). En segundo lugar, la donación del faraón a los templos de tierras que servían para asegurar el culto de los sacerdotes a los dioses así como para el sustento de los propios encargados del templo. Estas tierras eran administradas directamente por el Sumo Sacerdote de cada templo formándose así una administración con un notable grado de autonomía.

En todo caso, todas estas actividades se apoyaban en el eficiente trabajo de los escribas. Estos solían provenir de las propias familias de los escribas o de la nobleza y suponen la formación de los encargados de la lectura y la escritura, actividades capitales en unaa sociedad básicamente analfabeta. El trabajo de estos escribas también incluirá la realización de cálculos matemáticos que resuelvan problemas sobre el catastro, la imposición de impuestos y su recogida, la construcción de los monumentos, etc.

Notas

1 Assman, J. (1995): “Egipto. A la luz de una teoría pluralista de la cultura”.
2 Padró, J. (1996): “Historia del Egipto faraónico”.
3 Hornung, E. (1991): “El faraón”.
4 Valbelle, D. (1998): “El Egipto faraónico”.
5 Lara, F. (1991): “El Egipto faraónico”.
6 Serrano, J.M. (1993): “Textos para la historia Antigua de Egipto”, pp. 80-81.
7 Ibid, p. 82.
8 Ibidem.
9 Ibid, p. 90.
10 Ibid, pp. 90-91.
11 Ibid, p. 111.
12 Ibid, p. 155.
13 Fernández, L. (1993): “La propiedad inmueble y el registro de la propiedad en las sociedades antiguas. El Egipto faraónico”.
14 Lichteim, M. (1988): “Ancient Egyptian autobiographies chiefly of the Middle Kingdom”, p. 43.
15 Menu, B. (1982): “Recherches sur l’histoire juridique, economique et sociale de l’Ancienne Egypte”.
16 Fernández, L. Op. cit, pp. 39-40.
17 De Rachewiltz, B. (1991): “Los antiguos egipcios”, p. 78.
18 Ibid, pp. 80-82.
19 Ibid, pp. 81-82.
20 Valbelle, D. Op. cit.
21 Strudwick, N. (1985): “The Administration of Egypt in the Old Kingdom”.
22 Cit. en Lalouette, C. (1986): “Thèbes ou la naissance d’un empire”, pp. 353-354.
23 Lara, F. Op. cit, p. 177.
24 Martín, F.J. (1998): “Amen-hotep III. El splendor de Egipto”, p. 120.
25 Serrano, J.M. Op. cit, pp. 223-224.

Capítulo 3
El marco económico

Las fuentes

La organización administrativa funciona en estrecha relación con unos elementos y mecanismos económicos cuya descripción y breve análisis nos ocuparán en las próximas páginas. Lo primero que hay que resaltar a este respecto es, como en tantas otras facetas de la antigua vida egipcia, la escasez de datos disponibles. Se dispone de un conjunto reducido de papiros de carácter institucional que muestran una serie de limitaciones: Los archivos funerarios del templo dedicado al culto del faraón Neferirkaré Kakai (2472 - 2462) encontrados en Abusir son una de las fuentes principales de conocimiento de la administración de un templo en la V dinastía. Sin embargo, suponen el registro de los ingresos diarios en un período extremadamente corto de tiempo (un mes). Otro tanto sucede con los papiros Bulaq que registran 23 días de movimientos económicos en la residencia tebana del rey Sobekhotep II (hacia 1750), al final del Imperio Medio. El estudio de estos documentos proporciona pistas de una parte probablemente importante del marco económico de la época, pero impide extraer unas conclusiones indubitables sobre dicho marco.

Otro tanto sucede con los grandes papiros correspondientes al período ramésida del Imperio Nuevo: El papiro Harris presenta las donaciones efectuadas por Ramsés III (1187 - 1156) a los tres grandes templos de su tiempo: El de Amón en Tebas, en el Atum en Heliópolis y el de Ptah en Menfis, mientras que el papiro Wilbour, probablemente del reinado de Ramsés V (1146 - 1142) es un documento catastral donde se fijan las posesiones y los tributos del templo de Amón en una parte considerable del territorio egipcio.

Esta información, junto a pequeños papiros que serán examinados en capítulos posteriores, se puede completar con papiros privados (como los de Hekanakthe, ya mencionados) y, sobre todo, los miles de ostraca encontrados en distintos puntos de la geografía egipcia (sobre todo en el poblado ramésida de Deir el-Medineh) que suponen un conjunto importante de anotaciones sobre transacciones privadas.

Con todo ello se ha pretendido desde hace poco más de treinta años trazar las líneas fundamentales del marco económico en que se mueve la vida egipcia de la época. Lo reciente del interés de los egiptólogos por los aspectos económicos conduce a que las propuestas estén aún en discusión. Trataremos en todo caso de reflejar en estas páginas cuál es el estado de la cuestión sin entrar en detalles propios de especialistas.

El modelo redistributivo

La construcción de modelos adecuados a la economía egipcia ha supuesto la confrontación de dos ideas básicas: Las que se apoyan en la utilidad marginal y las que destacan la organización económica a través de instituciones[1].

1. La teoría de la utilidad marginal se basa en la admisión de que el fundamento de la economía es siempre el hecho de que los recursos son escasos y que el sistema se basa en una maximización por los individuos de dichos recursos. La tarea de los modelos que se propongan, por tanto, debe ser la de explicar los actos individuales destinados a maximizar la disponibilidad de dichos recursos.

2. Los segundos sostienen que el fundamento de una economía es el hecho de que se organiza a través de instituciones y que éstas se inscriben en un contexto cultural concreto en el cual estas instituciones encuentran su explicación. La tarea de los modelos propuestos, en este caso, es la descripción y justificación del nacimiento y funcionamiento de estas instituciones.

El modelo más ampliamente aceptado para describir las relaciones económicas en el antiguo Egipto es el denominado 'redistributivo', un modelo que se inscribe dentro del segundo tipo de los mencionados y del que es autor Polanyi. Su primer punto de apoyo consiste en defender que la economía del antiguo Egipto es anterior a la creación del mercado como mecanismo fundamental en la determinación del precio de los bienes mediante la ley de la oferta y la demanda. Nada de esto tiene sentido en una economía fundamentalmente dirigida como la egipcia donde la noción de precio como valor de cambio estandarizado de un bien no tiene el mismo sentido que actualmente. Y ello por dos motivos: Por la inexistencia de moneda acuñada y porque el mecanismo fundamental de intercambio de bienes es el trueque, antes que la compra y venta.

A lo largo de este capítulo y en otros posteriores el lector podrá observar que estas afirmaciones, admisibles en un primer momento, deben matizarse para explicar algunos de los movimientos económicos encontrados en los documentos antes mencionados, particularmente en los ostraca que describen las transacciones privadas.

Sin embargo, es indudable que, durante la mayor parte de la historia del antiguo Egipto, los movimientos económicos de que se tiene constancia forman parte de una organización centralizada en la figura del faraón. Así la importancia que el 'sector público' debía tener en la economía egipcia se aprecia por determinadas necesidades que precisan la acción de dicho gobierno central (el almacenamiento de grano para su distribución en caso de necesidad, la construcción y mantenimiento de canales para el correcto aprovechamiento de la crecida, la organización de grandes expediciones militares y comerciales a países del entorno, las necesidades de mano de obra planteadas por las grandes construcciones, etc.). Como ya se ha dicho en el capítulo anterior, el faraón es propietario de toda la tierra (lo que incluye hombres y animales) y, dada la fundamental naturaleza agrícola y ganadera de la economía egipcia, es indudable que los movimientos económicos van a estructurarse teniendo como eje al faraón como elemento básico.

Ahora bien, una característica fundamental del modelo redistributivo de Polanyi es el conjunto de 'derechos y obligaciones' que existe entre el faraón y su pueblo[2] y cuyos mecanismos no se han estudiado aún con el detalle necesario. La tierra es del faraón pero en ella trabaja el campesino que está obligado a dar parte de su trabajo (la corvea) y de los productos obtenidos (las tasas) al faraón a través del Granero y el Tesoro. Pero el faraón también está obligado, para llevar a cabo la ley de Maat, a proporcionar a estos campesinos los medios de subsistencia adecuados, lo que se ha mencionado como la ‘función nutricional’ del faraón.

En este equilibrio entre derechos y obligaciones la relación faraón-campesinos conoce diversas instancias delegadas que lo hace más complejo. Así, el faraón dispone de amplios dominios reales, tierras directamente de su propiedad, que dirigidas por sus mayordomos (parte de la nobleza asociada a la Gran Casa) dan trabajo a un grupo numeroso de campesinos egipcios que, como producto de su trabajo, han de recibir una serie de raciones fundamentalmente alimenticias que les permitan vivir a ellos y a sus familias.

Pero los dominios reales fueron objeto de donación sea a la nobleza por servicios prestados o a sacerdotes o militares, por ejemplo, durante el Imperio Nuevo. Estos podían cultivar la tierra por sí mismos (“por su propia mano” suelen decir los documentos) pero también era usual el arriendo de sus tierras a campesinos que estaban obligados, a cambio, a entregar de 1/3 a ½ de la cosecha al propietario de cuya parte se pagaban los impuestos al faraón[3].

Las relaciones podían hacerse complejas por otros motivos como es la descentralización administrativa por la que se encargaba a los nomarcas la imposición de tasas y tributos dentro de su nomo a fin de que se proveyera a sus habitantes con las raciones adecuadas pero, al tiempo, se diera una parte de los bienes a la administración centralizada del faraón. Esta forma de funcionamiento, que alcanzaría una autonomía importante en el Primer Período Intermedio por ejemplo, es similar a la forma de mantenimiento de las fundaciones piadosas y los templos que las caracterizan.

Los templos en el modelo redistributivo

Las fundaciones piadosas y los templos asociados son un elemento intermediario fundamental, dentro del marco de derechos y obligaciones, en las relaciones entre el faraón y el campesino egipcio. La ley de Maat obliga al faraón a ser justo, seguir la Verdad, amar a su pueblo y proveerle de lo necesario. Tales son algunas de las virtudes que se exaltan particularmente cuando se construye la imagen del faraón como buen pastor en el Imperio Medio pero que subsisten de manera más o menos explícita a lo largo de todo el período estudiado. Pero el faraón es el intermediario entre los hombres y los dioses y en esta dualidad en la que el egipcio vive tan arraigadamente el faraón es el encargado del culto, el que hace peticiones a los dioses, el que se dirige a la fuerza que hay en el Nilo para que la crecida sea fructífera, el que protagoniza todos los homenajes a los dioses, el que los cuida, los viste y los alimenta.

Así pues, el faraón es el encargado del culto a los dioses pero dado que no puede estar en todos los lugares de la larga tierra egipcia, delega en sacerdotes que residen en los templos que aparecen diseminados en todo el curso del río y que el faraón se contenta con visitar esporádicamente. Por otro lado, los templos que se enmarcan dentro de las fundaciones piadosas en honor de los faraones muertos (o bien los que se permiten miembros de la nobleza) tienen necesidades similares: Precisan tierras provenientes de los dominios reales con sus campesinos y animales que produzcan los bienes necesarios para garantizar las ofrendas propias del culto. La importancia de estas provisiones puede valorarse a partir de los datos del papiro Harris que, durante el reinado de Ramsés III, muestra que el templo de Amón en

Karnak disponía aproximadamente de 230.000 hectáreas, la tercera parte de todo el territorio registrado, mientras que el templo de Re en Heliópolis sólo llega a la sexta parte y el de Ptah en Menfis alcanza la trigésima parte del primero.

Estas tierras pueden ser administradas directamente por las autoridades del templo (particularmente el Sumo Sacerdote) en una relación semejante a la establecida entre el faraón y sus tierras, o bien puede dejar terrenos en arriendo a algunos campesinos que, a cambio de su subsistencia directa dará al templo una parte de la producción agrícola. Con ello, el templo se organiza con cierta autonomía al modo de los nomos en sus momentos de mayor independencia.

Si desde un punto de vista actual tendemos a valorar las relaciones entre las propiedades del faraón y las de los templos como contrapuestas ello no obedece a la valoración efectuada por los propios egipcios, al menos hasta el final del Imperio Nuevo. Las fundaciones piadosas eran un obligado homenaje de un faraón a sus antepasados que velaban por él desde la otra vida. La construcción de templos solares, el levantamiento de obeliscos, la dotación de bienes a los templos, era una forma de agradecimiento a los dioses por sus favores, de reconocimiento y culto a su importancia dentro de la vida egipcia y a los dones que eran esperables de ellos. Los templos fueron además un brazo institucional del gobierno egipcio de gran importancia cuyos Sumos Sacerdotes fueron siempre elegidos directamente por el faraón entre personas de la nobleza adeptas a él y que debieron oponerse en muy contadas ocasiones a la acción del faraón: Al final del Imperio Antiguo, en el corto período amarniense de Akenathón y poco más, salvo al final del Imperio Nuevo cuando el Sumo Sacerdote de Amón, Herihor, se hace proclamar faraón.

Es indudable que los templos pagaron impuestos al faraón durante un cierto tiempo inicial e incluso estaban obligados sus trabajadores a prestar servicios directos mediante la aplicación de la corvea. Sin embargo, esta situación fue modificándose muy pronto. La consideración de los templos como brazo institucional del gobierno del faraón[4] se aprecia en los decretos de exención de impuestos y corvea como el que el rey Neferirkaré, ya en la V dinastía, confiere al templo de Osiris en Abidos:

> "Decreto del Rey [para] el Superior de los Sacerdotes Hem-Ur.
> No permito que ninguna persona con autoridad pueda tomar a ninguno de los sacerdotes que se hallan en el distrito en el que tú estás para la corvea de la tierra, ni para ninguna [otra] obligación de trabajos del distrito, con excepción de la realización de los ritos para su dios en el templo en el que él se halla, así como el

> mantenimiento de los templos en los que ellos están. Están exentos eternamente según decreto del Rey del Alto y Bajo Egipto Neferirkaré”[5].

El templo goza entonces de diferentes ventajas: Posee tierras donadas por el faraón junto a los campesinos que las trabajan y, al tiempo, disfruta de ventajas en cuanto a la exención de tasas o de la sustracción de hombres para la corvea de la tierra en los dominios faraónicos (o referente a las construcciones, expediciones militares o comerciales, etc.). A cambio de estas ventajas y dada su integración dentro del ciclo de derechos y obligaciones que une al monarca con su pueblo, el templo debía proporcionar su sustento tanto a los trabajadores directos en el templo (sacerdotes y escribas de los diversos tipos existentes) como a los que laboraban la tierra del dominio funerario. Ello se hacía adjudicando raciones según la categoría social del trabajador a partir de las ofrendas recibidas (para las que se distinguían las correspondientes al dios y las que iban destinadas a los hombres) fundamentalmente en la forma de panes y cerveza pero también en otros alimentos e incluso en lino para la confección de tejidos, calzado, etc.

Vemos entonces que el modelo redistributivo se inscribe en un contexto social e institucional determinado, en que los derechos y obligaciones entre el faraón y su pueblo se estructuran, para su puesta en práctica, en torno a una serie de instituciones (dominios, donaciones, fundaciones, templos) de manera que la economía sirve para configurar las relaciones sociales características del antiguo Egipto. En este modelo las iniciativas individuales y las acciones a que dan lugar no tienen cabida puesto que son las instituciones las que, dentro de un contexto social determinado, protagonizan la vida económica del país.

El comercio con el exterior

Desde la III dinastía se encuentran referencias a expediciones comerciales, algunas de las cuales hemos mencionado en el primer capítulo al estudiar las relaciones de Egipto con las tierras de su entorno geográfico. Egipto es una tierra que dispone del adobe para la construcción de casas comunes y palacios de la nobleza o el faraón y es también abundante en piedra (granito en Asuán, caliza en Turah, alabastro en Gebel Ahmar, gres en Gebel Silsila, por ejemplo) que se emplea en las construcciones funerarias y en el templos. Sin embargo, carece de madera de calidad (pino, cedro) para la construcción de barcos con los que recorrer el Nilo y transportar, entre otras cosas, los grandes bloques de piedra. Los minerales también hay que buscarlos más allá de la orilla del Nilo, sea al Sinaí (cobre, amatista), a través del Sinaí desde poblaciones más alejadas (lapislázuli) o en Nubia (oro). A cambio, los productos manufacturados egipcios eran de una alta calidad (textiles, vasijas de oro, plata o bronce, papiros).

Sin embargo, conviene precisar algunas cuestiones en torno a las expediciones comerciales. Los registros encontrados, sean en las tumbas de diversos nobles o en las incripciones grabadas sobre las piedras del camino, manifiestan inequívocamente que estas expediciones se organizan obedeciendo a mandatos expresos del faraón[6]. La expedición de Henu por el Uadi Hammamat durante el reinado de Mentuhotep III declara a su vuelta del Punt (donde ha ido por incienso) y tras un resumen de sus actividades:

> “[Mi Señor, ¡Vida, Salud,] Fuerza! me ha enviado para conducir unos navíos *kabenyt* hacia la región de Punt... “, concluyendo: “He hecho esto para la Majestad

> de mi señor, porque me ama, porque soy alguien eficaz, vigilante a su hora para su señor...”[7]

Del mismo modo, el famoso viaje a Punt durante el reinado de Hatsheput (1478 - 1458) de la dinastía XVIII declara en su inscripción de Deir el-Bahari:

> “Una orden se escuchó desde el gran trono, un oráculo del mismo dios: debían abrirse las rutas hacia el Punt, debían ser atravesados los caminos hacia las Terrazas de la Mirra... Se actuó de acuerdo con todo lo que había ordenado la majestad de este dios, según el deseo de su majestad...”[8].

La misma complejidad organizativa de una expedición de estas características (Henu confiesa la participación de 3.000 hombres a los que habría que unir todos los animales que acarrean agua, alimentos, sandalias, etc.) necesitando canteros, trabajadores que cargaran las mercancías, así como otros que construyeran pozos durante el camino, exploradores y un número crecido de soldados, hace inviable para esta época en Egipto una organización privada de estas caravanas.

Así pues, las expediciones comerciales formaban parte de la economía redistributiva: El faraón obtenía de esta manera los materiales que le permitirían encargar a los trabajadores egipcios (artesanos, constructores de barcas) diversas tareas a cambio de las cuales ellos obtendrían las raciones que se estipulasen.

La segunda característica de estas expediciones es el hecho de que no parecen estar dirigidas hacia la obtención de un beneficio respecto a aquellos bienes que se ofrecen a cambio sino que funcionarían como una traslación a las relaciones internacionales del trueque, mecanismo cotidiano en la vida egipcia. Pocas veces se mencionan los productos que se llevan o se hace con gran vaguedad. Así el emisario real de la reina Hatsheput menciona:

> “[Llegada] del Emisario Real a la Tierra del Dios, junto con el ejército que le acompaña, ante los grandes del Punt, enviado con todos los buenos productos de la corte... para Hathor, Dama del Punt”[9].

para detallar después lo que se ha traído:

> “Cargando los barcos pesadamente con las maravillas del País del Punt: todas las buenas maderas aromáticas de la Tierra del Dios, montones de resina de mirra, jóvenes árboles de mirra, ébano, marfil puro, oro verde de Amu, madera de cinamomo, madera-*hesyt*, incienso-*ihemut*, incienso, pintura de ojos, monos, babuinos, perros, pieles de pantera del sur, y siervos y sus hijos. Jamás se trajo nada igual a esto para ningún [otro] rey desde el principio del tiempo”[10].

puesto que, como se afirma al final, el cargamento que se trae de vuelta es precisamente lo que honra al emisario real que ha conducido la expedición. ¿Entra el cálculo del beneficio en esta operación, siquiera implícitamente? Es difícil responder a la pregunta pero sí es constatable en otras expediciones que el faraón envía a traer una determinada cantidad de madera del Líbano o una piedra de unas dimensiones concretas para un sarcófago y lo único que se trae de vuelta es precisamente lo encargado, cuando una búsqueda del beneficio llevaría a cargar los transportes de vuelta (sean barcos o asnos) con un número mayor del encargado, lo que sería motivo de orgullo para el encargado de la misión.

Las relaciones internacionales presentaban también otro mecanismo que se integraba con cierta facilidad en el modelo redistributivo. Se trata de los ‘regalos diplomáticos’ que, en ocasiones encubrían verdaderos impuestos a países bajo la tutela del faraón. Hacia el año 1447 varias ciudades asiáticas envían a Egipto diversas cantidades de oro: Retenu, por ejemplo, manda 45 deben (cada deben pesa aproximadamente 91 gramos) y 55 deben el año siguiente, mientras que Ouaouat envía 2554 deben el primer año, 2844 el siguiente y 3144 deben a continuación[11]. Ello significa que esta última ciudad mandaba al faraón casi 300 kilos de oro al año, lo que es una cantidad muy crecida para la época. Estos envíos se presentan como homenajes del país a la figura del faraón para obtener una buena actitud por su parte o su alianza. Si ahora conocemos que dicho faraón era Tutmosis III, probablemente el mayor forjador de la imagen del rey guerrero en el Imperio Nuevo, el impulsor de más de treinta campañas militares en los países asiáticos llegando hasta Mesopotamia, podremos entender que estos ‘regalos’ son unos verdaderos impuestos.

Hay ocasiones, sin embargo, en que los ‘regalos diplomáticos’ son presentes que se intercambian países con un potencial semejante al egipcio. Entonces los cálculos se hacen con más detalle porque las tradiciones pesan y una disminución en los regalos puede suponer el enfriamiento de las relaciones. Así, en una carta del rey Burnanuriash II de Babilonia al faraón Akenathon, encontrada en los archivos de Tell el Amarna, se lee:

> “Desde el tiempo [en el que] mis ancestros y tus ancestros hicieron una declaración recíproca de amistad, ellos se enviaron buenos regalos como homenaje, y no rehusaron jamás una petición de cosa alguna valiosa. Mi hermano me ha enviado entonces dos minas de oro como regalo de homenaje. Si el oro es abundante, envíame tanto como tus antepasados. Pero si es escaso, envíame la mitad de lo que tus antepasados enviaban. ¿Por qué me enviaste dos minas de oro?. Mi trabajo para el templo es en este momento considerable, y estoy muy ocupado en su ejecución. Envíame mucho oro. Y por tu parte, todo lo que quieras de mi país, escríbeme para que se te pueda enviar... Te mando como regalo de homenaje 3 minas de lapislázuli auténtico y cinco tiros de caballos para cinco carros de madera”[12].

Todos estos regalos, sea cualquiera su origen, se integraban con facilidad en el circuito de intercambio característico del modelo redistributivo. Ello sucede igualmente con los regalos que intercambiaba el faraón con la nobleza sea como reconocimiento por una labor efectuada (del faraón al noble) o como homenaje (del noble al faraón). El examen del papiro Bulaq 18 del Imperio Medio revela la importancia del regalo y su integración dentro del intercambio de bienes: Los regalos oficiales pasan de la ciudad al templo, desde el palacio real al templo y desde el templo se reparte en forma de raciones a sus trabajadores[13].

La iniciativa privada

La iniciativa económica privada, de existir, no podría darse sin la propiedad privada. Desde los primeros tiempos dinásticos los faraones egipcios donaron algunos terrenos de sus dominios no sólo a fundaciones piadosas sino a particulares, fundamentalmente los altos funcionarios pertenecientes a la nobleza que destacaban por sus servicios al rey. Uno de ellos era, por ejemplo, Metjen, jefe de las explotaciones del rey Esnofru durante la IV dinastía[14]. En su tumba aparece una relación de sus tierras que comienza con 200 aruras (una arura equivale a poco más de 1/4 de hectárea) cuyos ingresos recibe en el tiempo de servicio al faraón, a las que hay que añadir 50 aruras más de su madre que debe compartir con sus hermanos y 12 aruras que recibe directamente del rey por determinado servicio. Finalmente el padre le proporciona a su muerte todas sus tierras, propiedad garantizada por una orden del rey. De manera que un noble de las primeras dinastías contaba con unas propiedades que superaban las 60 hectáreas de tierra (equivalentes a un cuadrado de unos 750 metros de lado), una cantidad muy considerable para un tiempo en que las propiedades de alrededor de 2 aruras (equivalentes a un cuadrado de unos 70 metros de lado) debían permitir el sostenimiento de un campesino y de toda su familia.

Es obvio a partir de lo dicho que las tierras donadas por el faraón podían heredarse y ello parece haber sido una constante a lo largo de la historia egipcia pero, a fin de cuentas, la tierra seguía siendo de propiedad del faraón y se necesitaba una real orden para que dicha heredad no revirtiera de nuevo en el faraón a la muerte del usufructuario. Hay que distinguir, no obstante, entre las tierras donadas a una persona por sus servicios al faraón, que podían pasarse con facilidad de padres a hijos, y las tierras adjudicadas a una persona en razón de un cargo, como es el caso de gobernador del nomo. Estas volvían inmediata e íntegramente a la corona en caso de que otra persona fuera nombrada para dicho cargo en sustitución de la anterior.

Sólo es constatable el arrendamiento de estas tierras en parte a unos campesinos que, a cambio de una cantidad de arrendamiento (que incluiría los impuestos a pagar a la administración central), podían disfrutar de los beneficios de la tierra. Sin embargo, diversos datos indican que no siempre fue así. A medida que la nobleza adquiría un mayor poder a finales del Imperio Antiguo, sus tumbas mostraban un mayor lujo y ornato, sus inscripciones registran una gran cantidad de ofrendas diarias. Ello no podía hacerse sin la constitución de dominios funerarios privados, tierras que dichos nobles dedicaban al sustento de dichas ofrendas y de los sacerdotes y demás personal encargado de realizarlas. Estos terrenos podían entenderse como una verdadera propiedad privada, unos bienes raíces en la historia egipcia.

En general, los períodos de tiempo en que el poder central se debilitaba coinciden con una mayor disponibilidad de las tierras para ser donadas, cedidas o canjeadas entre particulares. Sucede lo mismo que con el cargo de nomarca. Dependiente del nombramiento del faraón fue adquiriendo carácter hereditario a finales del Imperio Antiguo de manera que durante el período siguiente (Primer Período Intermedio) el aparente caos de la administración central conlleva la emergencia y autonomía de estos gobernadores que disponen de las tierras bajo su cargo (en principio, ligadas exclusivamente a su función) como propias. Así lo muestra la biografía de Ankhtyfy el Bravo, noble hereditario, príncipe, canciller del Rey del Bajo Egipto y, sobre todo, gran Jefe de los nomos de Edfú e Hieracómpolis en el Primer Período Intermedio. En ella Ankhtyfy narra su control sobre los nomos propios, el préstamo de trigo a otros nomos para paliar la hambruna, la que parece una tutela militar y económica sobre Kom-Ombo y Elefantina y, en fin, los combates que establece con los nomos de Tebas y Koptos en alianza con los guerreros de Hermonthis. La situación que describe es característica de una ausencia de control central:

> “Todo el Alto Egipto se moría de hambre, hasta el punto de que todo hombre se comía a sus hijos. Pero yo no permití que nadie muriera de hambre en este nomo. He proporcionado préstamo [de cereal] al Alto Egipto... Toda la tierra entera se ha

> convertido en un saltamontes hambriento (?), unos [yendo] hacia el norte y otros hacia el sur”[15].

Es indudable la completa falta de control sobre la situación de la administración central que conduce a un hambre de grandes proporciones, emigraciones de los campesinos de unas tierras a otras, así como la emergencia de las autoridades provinciales, los nomarcas, luchando entre sí por la preponderancia y sustituyendo la función nutricia del faraón hacia su pueblo por la suya propia.

El modelo redistributivo de Polanyi entra aquí en colisión con los hechos. Porque es indudable que dicho modelo se basa en la confianza mutua entre los dos agentes económicos: El faraón confía en su autoridad sobre la tierra y los hombres que en ella trabajan y, sobre todo, los campesinos confían en que el faraón les garantizará un nivel de sustento adecuado. Cuando esta confianza en los derechos y obligaciones se derrumba, el campesino ya no puede esperar nada del gobierno central y debe buscar mediante la emigración u otros recursos ese sustento imprescindible. Por el mismo motivo, los gobernadores elegidos para los nomos o que han heredado el cargo de sus antepasados asumen la propiedad de las tierras y de sus productos agrícolas a la hora de paliar el hambre existente con lo que vienen a reproducir, a escala provincial, el modelo redistributivo que el faraón ahora no puede sostener.

Es por ello que se ha señalado que el modelo redistributivo viene a describir adecuadamente la situación pero sólo en el caso de un gobierno central fuerte. Los tres períodos intermedios de la antigua historia egipcia se caracterizan por una debilidad del control faraónico que permite la emergencia de las iniciativas locales y privadas. A ese propósito se han mencionado repetidamente los interesantes documentos de Hekanakthe, un funcionario que vive hacia finales de la dinastía XI. Poseedor de un dominio en Nebesyt, cerca de Tebas (en el Alto Egipto), debe viajar durante algo más de un año por el Bajo Egipto desde donde va enviando cartas a la persona encargada de la administración de sus tierras y a sus familiares para que dicha administración sea correcta. En ellas, además de comentar el hambre que presencia en su recorrido plantea situaciones de la administración de sus tierras: Percepción de rentas de pequeños agricultores, almacenamiento de grano y distribución de raciones y, sobre todo, referencias a mecanismos tan extraños al modelo redistributivo como el beneficio tal como se manifiesta en la petición de que no se venda todavía un animal determinado porque en el norte vale más de lo que dan en el sur.

Otros datos coinciden en la misma tesis. En el período ramésida del Imperio Nuevo surge de manera sistemática la donación de pequeñas parcelas de tierra a sacerdotes, funcionarios y soldados que han destacado por sus servicios, tierras que se compran y venden con una facilidad y frecuencia no existentes hasta entonces. Cuando la debilidad de los faraones va a desembocar en el Tercer Período Intermedio los templos gobiernan sus tierras con total autonomía (al modo de los nomarcas muchos siglos antes) mientras que los particulares disponen plenamente de sus propiedades e incluso surge la controvertida figura de los agentes comerciales que pudieran tener un carácter privado. Los *shuty* (traducible quizá por mercaderes o tratantes) son personas cuya acción comercial discurre preferentemente durante el reinado de Ramsés XI (1104 - 1075), de nuevo en un período en que la acción del faraón es de gran debilidad (se acerca a su final el Imperio Nuevo). El papiro Lansing 4.8-9 sostiene que

> “Los tratantes navegan río abajo y río arriba, atareados cual abejas [literalmente, cobre], llevando mercancías de una ciudad a otra y suministrando lo que haga falta”[16].

que parece confirmar la actividad de estos mercaderes dejando en la duda, sin embargo, a cargo de quién trabajaban, si eran simples agentes del templo (y, por tanto, integrados en el sistema redistributivo) o actuaban por iniciativa propia para obtener un beneficio. Otros datos son igualmente ambiguos respecto al objetivo que perseguían determinados trabajadores que parecen ser poseedores de sus medios de trabajo. Por ejemplo, el decreto de Horemheb (1319 - 1292) plantea la posibilidad de que el barco de un particular sea 'requisado' por cualquier miembro del ejército:

> "[Si, mientras tanto, un funcionario encuentra a un] particular desprovisto de barco, él le procurará un barco para desempeñar sus prestaciones por medio de algún otro y estará [así] en condiciones de llevar madera por su cuenta personal; cumplirá sus obliga[ciones]..."[17].

lo que lleva a sostener la existencia de barqueros que prestaban sus servicios recorriendo el Nilo para satisfacer necesidades que tanto podían ser de la administración como de otros particulares. Pero de nuevo se puede cuestionar si se hacía en la búsqueda de un beneficio o como una especie de trueque de servicios y al objeto de simplemente garantizar un mínimo nivel de subsistencia.

Esta serie de datos apoyan las tesis de la utilidad marginal, la búsqueda individual de la maximización de los escasos recursos disponibles, al amparo de estos períodos en que el gobierno central se debilita o está prácticamente ausente.

Uno de los mayores defensores de esta postura es Barry Kemp[18] que afirma:

> "No hay ninguna duda respecto a una de las vertientes de la antigua combinación, la dirigida por la administración institucional y del tipo redistributivo. Sin embargo, no sucede lo mismo con la otra vertiente, la satisfacción de la demanda de los individuos, donde el enfoque de Polanyi destaca la minimización de su poder económico"[19].

Si la atención en el estudio de la economía egipcia pasa de las instituciones (faraón, administración, templos, dominios reales y funerarios) al individuo y sus necesidades estamos adoptando un enfoque que caracteriza a estas teorías. A partir de ahí Kemp muestra una serie de ejemplos que indican la existencia de unas necesidades individuales y no sólo las primarias de alimentación y vestido sino otras secundarias que se caracterizan por el deseo de enriquecimiento o la búsqueda del beneficio.

A los papeles de Hekanakthe este autor va a añadir otra serie de datos, comenzando por el enriquecimiento que muestran las tumbas de los nobles al final del Imperio Antiguo. Esta acumulación de riqueza, sin embargo, no es incompatible con el modelo redistributivo, como señala Kemp, dado que sería el fruto de los regalos y donaciones con que el rey retribuye a los nobles que se encargan de hacerle servicios importantes. Pero también indica que existe un deseo individual de ostentación que, en otras circunstancias, puede canalizarse de otra manera.

Aunque estos datos pueden deslizarse con facilidad hacia un resbaladizo terreno psicológico (en el que es fácil examinar el pasado con criterios demasiado actuales), es cierto que aquel tiempo plantea necesidades objetivas constatables. En efecto, los nobles eran enterrados desde las primeras dinastías en mastabas construidas alrededor de la pirámide de su señor lo que debía asegurar que siguieran sirviéndolo en el Más Allá y garantizaban que seguirían disfrutando del favor del rey. Con el tiempo, estos enterramientos van alcanzando un mayor lujo y, cuando el gobierno faraónico se debilita, las mastabas se agrupan en el propio nomo donde ha trabajado el noble a lo largo de su vida y alcanzan un ornato no igualado hasta entonces.

> "Sin embargo, un buen entierro sólo formaba parte de las presiones económicas ejercidas sobre la demanda privada. Un funcionario que prosperase podía querer hacerse una casa nueva... Luego estaban los artículos que hijas e hijos tenían que adquirir para reunir los bienes comunes que sentaban las bases de un contrato matrimonial; había también las donaciones piadosas a los santuarios, los posibles regalos y sobornos para ganarse un ascenso, y el general alarde competitivo de riquezas suscitado por la existencia de una corte ostentosa y lujosa"[20].

Tras constatar la existencia de esta demanda privada Kemp resalta las discrepancias que se encuentran de querer integrarlas dentro del modelo redistributivo:

> "La respuesta que da el enfoque de Polanyi a la existencia de una demanda de cosas que no eran meramente secundarias a la vida es la pasividad económica enlazada con el optimismo: trabajar con honestidad y esperar pacientemente que la lealtad, el trabajo arduo y las obligaciones que los demás tenían con uno trajesen tiempos mejores"[21].

Y esta actitud, que podía estar presente ante un fuerte gobierno centralizado, se quebraba en el marco de un descontrol administrativo, cuando las obligaciones del faraón hacia la nobleza y de la propia nobleza entre sí se debilitaban (recuérdense las lamentaciones de Ipu-ur). De ahí surge la búsqueda de un enriquecimiento alejado de los circuitos económicos tradicionales: El comercio, del que hablaremos a continuación, las sustracciones en los graneros públicos o el puro y simple desvalijamiento de los ajuares funerarios de nobles y hasta faraones por parte de los campesinos de la época. Numerosos testimonios de finales del Imperio Nuevo atestiguan los juicios a que eran sometidos los culpables de este último delito y cómo lo robado se incluía en los bienes familiares y servía finalmente para comprar mercancías integrándose así en el ciclo económico cotidiano.

En suma, los propios detractores del modelo redistributivo sostienen su validez durante largos períodos de la historia egipcia, aquellos que coincidían con un gobierno fuerte y una administración centralizada. Sin embargo, la importancia dada en el análisis de la economía de esta civilización a sus instituciones debe complementarse con una atención semejante dedicada a las necesidades individuales y a las iniciativas privadas para satisfacerlas. Como afirma Kemp,

> "Este enfoque [redistributivo] no da cuenta de la integración manifiesta de unos funcionarios ambiciosos en sentido material dentro del sistema, ni de la también evidente capacidad de adaptación que todo el sistema poseía. Podemos acomodar ambas [esferas de actuación económica] si aceptamos la existencia de un sector privado relativamente dinámico"[22].

En particular, la esfera de actuación privada cobra un mayor significado en todos los períodos intermedios en los que las necesidades individuales (no sólo las primarias sino incluso las de enriquecerse) pasan a un primer plano ante la ruptura de los presupuestos básicos del modelo redistributivo, el equilibrio entre obligaciones y derechos que une al faraón con su pueblo. Sin embargo, lo que Kemp afirma es algo más: Que el sector privado siempre existió dinamizando el sistema y satisfaciendo aquellas necesidades particulares que no encontraban acomodo en el sistema centralizado. Que, en suma, su presencia más detectable en los períodos intermedios no es sino la manifestación de que una forma de actuación económica preexistente cobra una mayor importancia cuando la debilidad del gobierno central no satisface las necesidades individuales en el grado de entonces.

La adquisición de mercancías

El primer hecho que conviene resaltar en las transacciones económicas de todo tipo registradas en el antiguo Egipto es la inexistencia de moneda. Esta no fue acuñada hasta la segunda mitad del primer milenio, en la dinastía XXVI, y sólo por la influencia de los mercaderes griegos asentados en tierra africana y como medio para pagar sus servicios. Por tanto, durante el período de tiempo estudiado no existía moneda alguna, lo que no quiere decir que no se contase con dinero, entendido como una mercancía de valor estandarizado al que remitir el valor de otras mercancías. Tal es el caso del grano de cereal, así como la plata y el cobre.

La primera transacción económica que se puede fijar es aquélla por la que el gobierno centralizado o cualquiera de sus instituciones intermedias daba al trabajador material para su sustento a cambio de su trabajo. En los papiros administrativos aparecen referencias a estos abonos habitualmente en forma de grano, sea de trigo[23] para el pan o de cebada para la cerveza: Un jefe de equipo, por ejemplo, podía recibir 5 ½ khar de trigo y 2 khar de cebada mensualmente[24] y, dado que cada khar equivale aproximadamente a 91 litros, ello quiere decir que su salario mensual era de unos 500 litros del primer grano y unos 180 litros de cebada.

Los salarios podían también darse en productos elaborados a partir de este grano, sobre todo si procedía de un reparto de ofrendas: Tal es el caso del templo de Illahun durante el Imperio Medio, en el que el director de la institución recibe como salario 16 2/3 panes de trigo, 8 1/3 de jarras de cerveza-sd y 27 2/3 jarras de cerveza-*hpnw*[25].

El hecho de que la forma de que los salarios también pudiesen corresponder a otros bienes (vegetales, pescado, leña, etc.) indican que su objetivo era, fundamentalmente, proporcionar al trabajador directamente los bienes que necesitaba para su sustento y el de su familia. El hecho de que el grano fuera la unidad fundamental se apoya en el hecho de que este grano era la base de su alimentación, sea en la forma final de pan o en la elaboración de cerveza (una especie de sopa hecha con cebada).

Otra cosa distinta sucede con las transacciones entre particulares que aparecen registradas en un gran número de ostracas, en los que sí puede hablarse con propiedad de la noción de dinero. Es necesario apuntar desde un principio que estas transacciones son difícilmente traducibles a las nociones actuales de compra/venta. Sucede lo mismo con otras nociones económicas como la de préstamo. Son conceptos que se han ido desarrollando en nuestra civilización a partir de los usos económicos marcados por la ley romana, pero corresponden difícilmente a los conceptos manejados por los antiguos egipcios. Sin embargo, los egiptólogos se esfuerzan por hacer una a veces difícil traducción de los textos originales egipcios de manera que los conceptos manejados por aquella cultura se correspondan con expresiones actuales que denotan conceptos lejanos a los originales. Así, los términos lingüísticos que aparecen en los ostracas registrando transacciones entre particulares se ha llegado a traducir como ‘compra’ y ‘venta’, pero se prefiere actualmente otros términos como ‘dar’ o ‘adquirir’[26]. Janssen[27], en su estudio de los ostracas encontrados en la aldea ramésida de Deir el-Medineh, clasifica varios formatos para expresar estas transacciones, predominando la fórmula ‘Que A da a B a cambio de P’.

Con todas estas precauciones a la hora de estudiar estos movimientos pueden establecerse dos hechos:

1. Las transacciones entre particulares parecen referirse constantemente a trueques, cambios entre bienes que tiene cada una de las dos partes en juego y que necesita la otra.
2. Estos trueques no se hacen habitualmente y de manera directa entre los bienes intercambiados sino que se remiten a un valor estandarizado (unidades de grano, plata o cobre, generalmente), lo que permite hablar con propiedad de la existencia de dinero.

En los ostracas de Deir el-Medinah (dinastía XX) predomina como dinero el deben (unidad de peso equivalente a 91 gramos) de cobre. Un ejemplo podría ser el citado por Janssen[28]: Un hombre quiere que otro le haga un sarcófago que se puede valorar en 25 ½ deben de cobre. Para ello tiene que ir reuniendo diversos bienes que sumen un total de dicha cantidad, con lo que tiene que recurrir a dos cabras (por un total de 5 deben), un cerdo (5 deben), dos troncos de madera de sicómoro (2 deben), tejidos y trozos de cobre que llegan a completar la cantidad pedida. Con todos estos bienes puede pagar el servicio que le hace el constructor de ataúdes.

Todos estos registros muestran, a lo largo del tiempo, unas alteraciones en los precios de los bienes difíciles de interpretar. Algunos de ellos presentan una estabilidad continuada (el trigo y la cebada, por ejemplo, de tan gran importancia en los salarios, tiene un precio de 1 a 2 deben), probablemente garantizada por la distribución del grano almacenado en los grandes graneros estatales cuando la crecida del río provocase una mala cosecha. Sin embargo, en otros momentos como los correspondientes al reinado de Ramsés VII, los precios del trigo y la cebada alcanzaron los 8 deben[29] volviendo al final de la dinastía a la situación original, lo que no significa la presencia de un proceso inflacionario generalizado, por cuanto otros precios no sufrieron variación apreciable. Todo ello hace difícil la interpretación de lo sucedido y de la importancia que la tradición y otros factores económicos (como podría llegar a ser un proceso de especulación no justificable con los datos existentes, variaciones estacionales, etc.) tenían en la fijación de precios.

De cualquier modo, las transacciones privadas daban origen a numerosos cálculos entre los protagonistas del trueque que justifican el prestar una primera atención a las operaciones aritméticas a que dan lugar, como haremos en el próximo capítulo.

Conclusiones

Al estudiar las relaciones económicas características del antiguo Egipto destaca, en primer lugar, la limitación de los datos existentes: Un conjunto de papiros encontrados en diversos templos que describen trozos muy limitados de las operaciones realizadas en dichas instituciones y un grupo de ostracas que registran transacciones y operaciones económicas entre particulares. Pese a estas limitaciones y lo reciente del estudio por los egiptólogos de las características económicas de esta civilización, se ha propuesto por Polanyi un modelo redistributivo que describe estas características.

Este modelo centra su interés en las instituciones que desarrollan una vida económica dentro de un contexto social y religioso determinado. Estas instituciones se articulan entre la más superior (el faraón) y la clase social más humilde (el campesinado) permitiendo el establecimiento entre ambas de unos derechos y obligaciones que permiten al primero recolectar unos tributos de los segundos (sea en forma de trabajo mediante la corvea o por la percepción de tasas sobre las cosechas) redistribuyendo estos tributos mediante el pago de salarios o raciones que permitan el sustento del campesinado. Esta función nutricia del faraón respecto de su pueblo no sólo se ejerce directamente en las tierras de su administración directa (los dominios reales) sino que también se hace en tierras de estos dominios donadas a la nobleza por sus servicios y, sobre todo, mediante la creación de fundaciones piadosas.

Estas fundaciones (que también están al alcance más modesto de la propia nobleza) tienen por objetivo rendir culto a los dioses que permiten y favorecen la vida egipcia y a los antepasados de los faraones cuyo favor desde el Más Allá se solicita. Para permitir este culto es necesario dotar a los templos de tierras y de ofrendas directas. Parte de las ofrendas pueden repartirse entre los encargados de dichos templos (sacerdotes, escribas, etc.) pero las tierras deben cultivarse por campesinos, sea directamente administrados por los sacerdotes o mediante el recurso del arriendo. En el primer caso los trabajadores deben recibir sus raciones mientras que en el segundo se sustentan con la parte acordada de la cosecha que obtengan. Todo ello permite defender que las fundaciones piadosas constituyen un brazo importante en el gobierno del faraón por cuanto sustituyen la función nutricia de éste último por la suya propia, delegada de la anterior.

Todas estas complejas relaciones tienen una estrecha relación con la forma en que históricamente se ha desarrollado la propiedad de la tierra: Siendo en principio del faraón sin exclusiones, las donaciones a nobles particulares que podían dejarla en heredad, la cesión de su administración a nomarcas cuyos cargos hereditarios y la debilidad eventual del gobierno central conducían a considerarla como propia, la autonomía y extensión alcanzada por los templos en diversos períodos históricos (particularmente en el Imperio Nuevo) así como la donación de tierras que podían enajenarse a sacerdotes y soldados durante el mismo período de tiempo (sobre todo bajo el gobierno de los Ramsés), todo ello constituían factores y circunstancias que hacen complejo el funcionamiento de este modelo redistributivo.

Además, aunque el modelo ha sido admitido como fundamental por todos los estudiosos ello no implica su exclusividad. Algunos de los documentos a que se ha hecho referencia destacan la aparición de iniciativas económicas privadas que pueden ser compatibles con un deseo de enriquecimiento individual, sobre todo en los llamados períodos intermedios en que el gobierno centralizado del faraón se debilita y la relación de confianza entre la institución faraónica y las demás clases sociales (nobleza, incluídos los nomarcas, así como el campesinado) entra en crisis. En ese tiempo de grandes hambrunas y emigraciones entre la población los nomarcas asumen funciones propias del faraón reproduciendo a escala provincial el modelo redistributivo pero además aparecen otros poseedores de tierras que las gestionan con un criterios basados aparentemente en una propiedad privada que no se remite a la autoridad del faraón. Así se encuentran comerciantes que navegan por el Nilo realizando servicios tanto a particulares como a instituciones y la propia nobleza, en general, parece iniciar un camino de enriquecimiento como se puede apreciar por el mayor ornato de sus tumbas.

Un modelo económico basado, no en las instituciones, sino en las necesidades individuales y en los mecanismos puestos en práctica para satisfacerlas dentro de un conjunto escaso de recursos, es factible en este tiempo. No tanto como alternativa al anterior, que parece plenamente admitido durante los largos períodos de fuerte gobierno central, sino como complementario manifestándose en los intervalos de tiempo en que este gobierno entra en crisis. Para algunos autores como Kemp las necesidades individuales son permanentes así como los mecanismos a que hemos hecho referencia, de manera que la esfera privada viene a suplir siempre la falta de efectividad del modelo redistributivo para satisfacer esas necesidades individuales. En esos períodos intermedios la esfera económica privada tiene que crecer ante la incapacidad del gobierno central de satisfacer las necesidades mínimas de alimento y vestido.

Todos estos modelos (particularmente el último) se apoya en un número escaso de documentos y las interpretaciones que se hacen de ellos son muchas veces discutibles. Este es el caso, por ejemplo, de los comerciantes que aparecen sobre todo en el período ramésida (los shuty) que tanto pueden interpretarse siendo agentes de las instituciones como actuando por iniciativa propia. Desde luego, la existencia constatable del trueque como forma primordial de transacción económica entre particulares, el monopolio real del comercio con los países del entorno y la no existencia de moneda acuñada inducen a pensar que el beneficio es una noción extraña al egipcio antiguo y que la iniciativa privada nunca pudo articularse por criterios de compra/venta, oferta/demanda típica de las sociedades basadas en el mercado.

Notas

1 Bleiberg, E. (1996): “The official gift in Ancient Egypt”.
2 Warburton, D. (1995): “The economy of ancient Egypt revisited yet again”.
3 Fernández, L. (1993): “La propiedad inmueble y el registro de la propiedad een las sociedades antiguas. El Egipto faraónico”.
4 Janssen, J.J. (1979): “The role of the temple in the Egyptian economy during the new kingdom”.
5 Serrano, J.M. (1993): “Textos para la historia Antigua de Egipto”, p. 165.
6 Bleiberg, E. (1995): “The economy of ancient Egypt”.
7 Lara, F. (1991): “El Egipto faraónico”, pp. 74-75.
8 Serrano, J.M. Op. cit, p. 118.
9 Ibid.
10 Ibid, p. 119.
11 Lalouette, C. (1986): “Thèbes ou la naissance d’un empire”.
12 Serrano, J.M. Op. cit, p. 125.
13 Bleiberg, E. (1996). Op. cit.
14 Valbelle, D. (1992): “El Egipto faraónico”.
15 Serrano, J.M. Op. cit, p. 88.
16 Kemp, B.J. (1996): “El Antiguo Egipto. Anatomía de una civilización”, p. 327.
17 Lara, F. Op. cit, p. 149.
18 Kemp, B.J. Op. cit.
19 Ibid, p. 296.
20 Ibid, pp. 305-306.
21 Ibid, p. 306.
22 Ibid, p. 330.
23 El trigo al que se hace referencia es una especie tetraploide cultivada y conocida científicamente como “Triticum turgidum diccocum”, presente mayoritariamente en todo el Antiguo Egipto, junto a la cebada.
24 Janssen, J. (1975): “Commodity prices from the Ramesid period”, p. 460.
25 Gillings, R.J. (1972): “Mathematics in the time of the faraons”.
26 Bleiberg, E. (1995). Op. cit, p. 1376.
27 Janssen, J. (1975). Op. cit.
28 Ibid, p. 10.
29 Ibid, p. 552.

Capítulo 4
Cuantificar y Medir

Las primeras escrituras numéricas

Alrededor del año 3.000 se logra la unificación entre el Alto y el Bajo Egipto, muy posiblemente por obra del rey Narmer, conocido por una paleta para pinturas cuyos símbolos le muestran reuniendo las coronas de ambas tierras egipcias al tiempo que derrota a numerosos enemigos y recibe el reconocimiento de alguno de los nomos ocupados. Pues bien, en Hierakómpolis (el Alto Egipto) se encontró una maza donde, junto al nombre de dicho rey, se deja constancia de un considerable botín obtenido tras diversas victorias: 400.000 toros, 1.422.000 cabras y hasta 120.000 prisioneros. Una gran masa de prisioneros, grandes rebaños de toros y de cabras cuyo recuerdo debe quedar recogido para mayor gloria del rey. Milenio y medio después la necesidad sigue intacta. Por ello, el faraón Tutmosis III manda inscribir en el templo de Amon-Re en Karnak la relación del botín obtenido en la conquista de la ciudad asiática de Meggido:

> “340 prisioneros vivos; 83 manos; 2.401 caballos; 191 yeguas; 6 sementales... potros. Un carro trabajado en oro, cuya [lanza] es de oro, perteneciente a este enemigo... 892 carros que habían pertenecido a su ejército”[1].

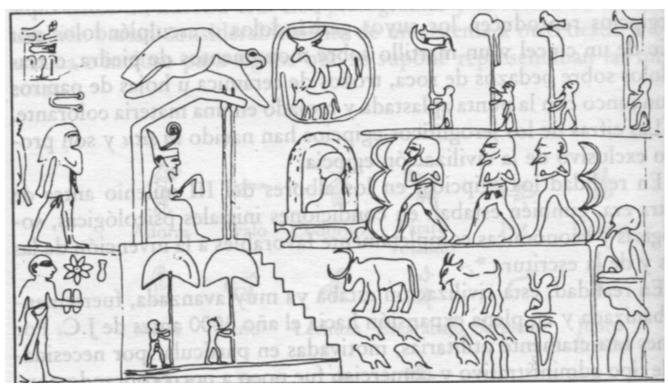
Desde muy antiguo los hombres han tenido la necesidad de cuantificar un grupo numeroso de objetos o fenómenos. Ciertamente es posible constatar la existencia de culturas primitivas (incluso relativamente recientes) que se contentan con nombrar los primeros números bajo el esquema de ‘uno-dos-tres-muchos’ mostrando el hecho de que su experiencia no les lleva a distinguir entre cantidades mayores que tres, en el ejemplo mostrado. Sin embargo, otros datos muestran lo contrario. Se ha encontrado un hueso en Africa que muestra una serie de muescas toscas y regulares que se han identificado con la acción de cuantificar las lunaciones (la aparición de la luna llena) con motivos mágico-religiosos.

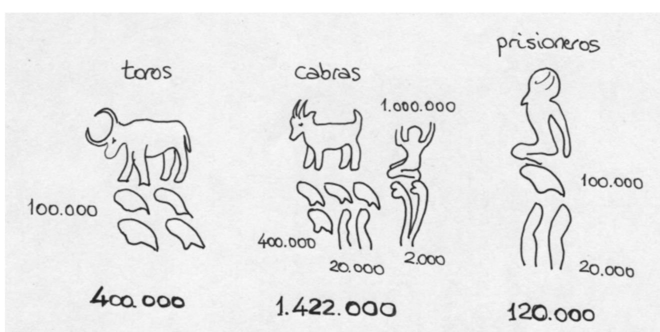
En el caso egipcio las representaciones de grandes cantidades se encuentran incluso en el período predinástico, prácticamente coincidente con la aparición de la escritura jeroglífica, inicialmente sobre la piedra de las tumbas y las estelas. Así pues, desde el momento de la unificación del Alto y Bajo Egipto la civilización egipcia ha mostrado el deseo de cuantificar grandes cantidades representándolas a través de su escritura. A la descripción inicial del número de prisioneros tomados al enemigo le sucederá la del conjunto de ofrendas necesarias para proporcionar una buena vida al ka de un fallecido. El tesorero Neferyu, en el Primer

Período Intermedio, levanta una estela en Dendera donde, junto a la clásica escena pintada donde aparece una mesa con ofrendas, manda inscribir:

> "Una ofrenda que el rey da y Osiris, señor de Busiris; un voz-ofrenda a Neferyu. 1000 libaciones de agua y pan, 1000 cervezas, 1000 de carne, ave, y gacelas, 1000 oryx, 1000 alabastros, 1000 ropas, 1000 de todas las cosas buenas para el Neferyu honrado.
> Una ofrenda que el rey da y Anubis, él en su montaña: un voz-ofrenda a Neferyu que dice: Yo dí pan al hambriento, ropa al desnudo. Yo transporté al necesitado en mi propia barca. Yo dí cosas a uno cuando supe acerca de lo que yo no sabía. El Canciller Real, Compañero Único, el Neferyu honrado"[2].

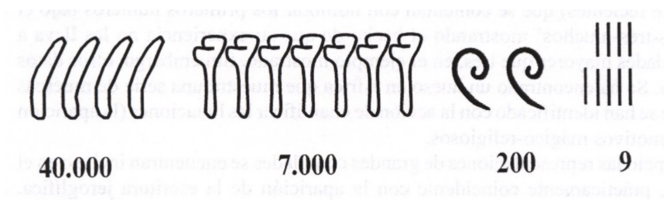
Sin embargo, lo que es necesario destacar es que estas primeras necesidad de cuantificación, que se mueven entre la glorificación del rey vencedor y la abundancia de ofrendas con motivos religiosos, dan paso desde muy pronto a necesidades de tipo económico que no harán sino crecer con el tiempo al compás del incremento, fortaleza y extensión del control burocrático de la administración sobre toda la tierra egipcia. Con la unificación del país se hizo obligatoria la realización de un censo de las tierras, el ganado y otros bienes al objeto de imponer tasas, tal como figura en la piedra de Palermo, cada dos años.





La maza del rey Narmer es posiblemente el primer testimonio de la representación de grandes cantidades en la historia egipcia. En la parte inferior de la maza aparece claramente inscrito un toro y bajo él cuatro vagas figuras iguales (cada una representando cien mil unidades). A su lado, bajo la representación de una cabra, se muestran cuatro figuras como las anteriores junto a dos dedos (diez mil unidades cada uno), un hombre extendiendo los brazos (un millón) y el dibujo de dos flores de loto (mil unidades cada flor).

Las mismas formas de representación se repiten, por ejemplo, en la estatua encontrada en Hierakómpolis del rey Jasejem (hacia el 2.700), de la segunda dinastía, cuando describe los 47.209 enemigos muertos por el rey[3]: Aparecen 4 dedos rudimentarios, siete flores de loto junto a dos trazos espirales (representando cien enemigos cada uno) y nueve trazos verticales consecutivos (unidades).



A partir de esta fecha aproximadamente los trazos sobre piedra de las representaciones de cantidades se van haciendo progresivamente más regulares y estandarizados, las unidades verticales no se escriben en extensión (nueve ocupan una amplia longitud) sino que se agrupan en dos filas y la escritura de números se va realizando de derecha a izquierda y desde la cantidad mayor a la menor (y no de manera desordenada como en los primeros casos). De esta manera, los enemigos del rey Jasejem se describirían más adelante así.

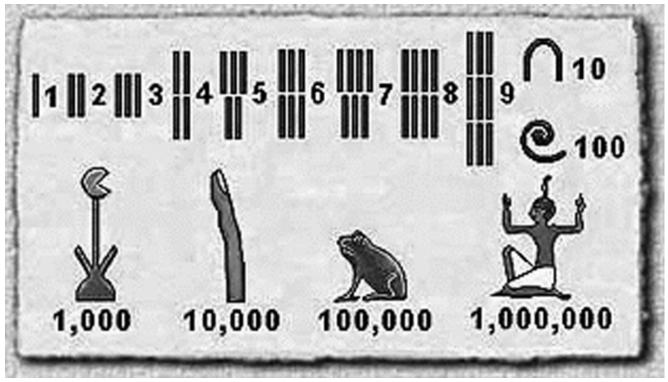
En lo sucesivo y por un convenio ampliamente aceptado en la literatura en castellano e inglés la representación de grandes cantidades que hagamos seguirá la dirección izquierda a derecha que es usual en nuestra numeración.

Los símbolos jeroglíficos y su significado

El sistema de numeración egipcio es estrictamente decimal, es decir, agrupa las unidades de un determinado orden en grupos de diez para constituir cada grupo una unidad del orden siguiente: Así, diez unidades equivalen a una decena, diez decenas a una centena y así sucesivamente, tal como nuestro actual sistema de numeración. Con ello, la escritura jeroglífica egipcia, como se ha apuntado anteriormente, precisa un símbolo distinto al menos para la unidad, la decena, la centena, el millar, etc. Analicemos cada uno de estos símbolos y su posible origen:

- La unidad se representa con una barra vertical.

Este trazo, semejante a la muesca realizada por los antiguos sobre un hueso o pedazo de madera con un objeto cortante, merece poca explicación, salvo enfatizar el hecho de que es un símbolo bastante usual en otras culturas antiguas.



- La decena se representa por una U invertida.

Este símbolo, que ya es arbitrario y específico de la cultura egipcia (como los restantes), puede provenir[4] del dibujo de la cuerda que sirviese antiguamente para atar diez palos formando un grupo de diez unidades.

- La centena se representa por una espiral.

Hay acuerdo sobre el hecho de que esta espiral representase una cuerda, útil fundamental para la medida de las longitudes, como se mencionará más adelante en este misma capítulo.

- El millar se representa por una flor de loto.

El loto es una flor acuática de largo peciolo que crece de forma abundante en la orilla del Nilo. Su forma se recogerá en los capiteles de muchas columnas y es, por tanto, un elemento usual en la iconografía egipcia. Pese a que esta abundancia podía estar en la base de su elección arbitraria como representación del millar es muy posible también que se deba a una composición fonética hoy desconocida. La representación pictográfica actual de un 'bizcocho' podría hacerse por dos dibujos representando unos ojos bizcos y un ocho. Evidentemente, lo dibujado no tiene en común con el objeto representado (el bizcocho) más que la similitud fonética (se pronuncian igual). Del mismo modo, se ha constatado que los fonogramas egipcios comenzaron muy pronto a utilizarse en grupo, de modo que la palabra 'nombre' (en egipcio rn) se escribía con un signo para la boca (r) y otro representando el agua (n). Es posible así que la pronunciación de la cuerda o de la flor de loto tuviera similitud con la pronunciación correspondiente a la centena o el millar, respectivamente, aunque ello no deja de ser una interesante especulación.

- La decena de millar se representa por un dedo levantado y algo flexionado.

Ello puede ser debido a la realización de conteos manuales en los que 10.000 se representara de tal manera. Se han atestiguado conteos manuales en muchas culturas de la antigüedad y algunas de sus formas han llegado hasta nuestros días incluso para grandes cantidades, por lo que resulta posible y hasta probable esta hipótesis.

- La centena de millar se representa por la figura de un renacuajo.

Indudablemente y al igual que la flor de loto, los renacuajos surgían en gran abundancia en las aguas del Nilo en determinado período del año. Su relación con la idea de abundancia y la estrecha relación del egipcio con el río pueden justificar, junto a la similitud fonética, la elección de este símbolo.

- El millón era representado por un hombre arrodillado y con los brazos hacia arriba.

Ciertamente se puede interpretar de varias maneras el significado de esta figura, desde un gesto implorante a otro asustado por la inmensidad de unidades que está representando. Sin embargo, hay que recordar que el millón tenía para el egipcio connotaciones religiosas. Los faraones del Imperio Nuevo, por ejemplo, construyeron sus templos de ‘un millón de años’ dándole un significado de ‘eternidad’. Parece que esta figura proviene de la representación de un hombre en contacto con la inmensidad de las estrellas (un sacerdote astrónomo) y sujetando la bóveda celeste.

- Los diez millones se representa por un sol.

Esta representación es más inusual por la magnitud de la cantidad a que se refiere y su origen podría ser el dibujo de una imagen asociada al dios Re.

Características del sistema egipcio de numeración

Disponiendo ya de los símbolos correspondientes a las unidades decimales de distinto orden (unidades, decenas, centenas, etc.), la representación de las cantidades se hacía de manera aditiva, es decir, acumulando tantos símbolos de la unidad de que se tratara como fuera necesario antes de necesitar pasar a la unidad superior. Así, por ejemplo, hacia 1.900 vive Iti, tesorero del faraón Mentuhotep IV que, en una estela encontrada en Gebelein, inscribe sus méritos

> “Sostuve Gebelein durante años improductivos, llegando a haber 400 hombres [en la miseria]... Construí 30 barcos, otras 30 barcas, y traje grano para Ini y Hefat, después de haber alimentado a Gebelein”[5].

En este caso, los 400 hombres se representarían con cuatro signos consecutivos de centenas:

mientras que los 30 barcos darían lugar a tres símbolos de las decenas:

Este sistema aditivo tiene el inconveniente de que el número de símbolos manejados en determinadas cantidades puede ser grande. Así, podemos comparar las cantidades anteriores, ciertamente manejables y fáciles de comprender, con la complejidad que se deriva de un texto como el siguiente, en que Tutmosis III sigue narrando el ganado de que se apoderó tras la toma de Meggido:

> “El ejército [de su Majestad] se apoderó igualmente de [rebaños de esta ciudad]: 387 [...], 1.929 bóvidos, 2.000 cabras, 20.500 carneros”[6].

En este caso, la descripción de 1.929 bóvidos requiere la inscripción de 21 caracteres mientras que una cantidad mayor de 2.000 cabras sólo precisa dos. Ello provoca una acumulación de símbolos que no son inmediatamente reconocibles y deben ser contados a su vez para llegar a describir la cantidad de unidades del orden correspondiente. Este problema vendrá resuelto en la escritura hierática, como veremos a continuación, pero a cambio de la multiplicación de signos distintos.

En todo caso, este sistema aditivo y la diferenciación entre los símbolos de las distintas unidades hace innecesario el orden de su descripción. De forma que si 20.500 carneros se representan por 2 dedos y 5 espirales tanto da dibujarlas en el orden dicho o con 5 espirales y luego 2 dedos, es decir, es indiferente mostrarlas de derecha a izquierda o de izquierda a derecha. En otras palabras, la posición de los símbolos numéricos no es importante como lo será en nuestra actual sistema indo-arábigo en el que 35 es distinto de 53 porque el valor de la cifra 3 viene dado por el correspondiente al símbolo y por la posición que ocupa la cifra en relación a las demás. Si los egipcios escriben de derecha a izquierda y de los símbolos de mayor valor a los de menor es por motivos de conveniencia, dada la comodidad de lectura que supone dicha disposición.

Esto trae dos consecuencias: La primera, como ya se ha dejado notar, es que los egipcios no conocen el valor de posición a sus símbolos numéricos; la segunda es que no les es imprescindible el cero. Dos dedos y cinco espirales representan inequívocamente dos decenas de millar y cinco centenas mientras que, actualmente, no es igual 20.500 que 25.000 ó 2.500 aunque sólo se utilicen dos cifras distintas de cero (el 2 y el 5). Al considerarse el valor de posición la presencia de ceros resulta imprescindible para denotar la cantidad adecuada.

Una ventaja del sistema egipcio de numeración es compartida con nuestro sistema decimal basado en el valor de posición: La multiplicación por diez resulta particularmente sencilla de obtener. Si en el caso actual (5 x 10 = 50) se llega a la regla de que el resultado de multiplicar por diez un número se obtiene sin más que añadir un cero a la derecha de la representación del número, en el caso egipcio la regla a emplear consiste en sustituir uno por uno los símbolos del número inicial por símbolos de la unidad inmediatamente superior. Así, el número cinco (cinco trazos |) darían lugar a cincuenta (cinco símbolos ∩).

Así pues, en general, el sistema egipcio de numeración presenta las siguientes características:

- Es decimal, disponiendo de símbolos específicos para las unidades de distinto orden.
- Es aditivo dentro de cada unidad.
- No conoce el valor de posición: Cada símbolo representa la cantidad asociada al mismo independientemente del orden en que aparezca.
- No necesita el empleo de un símbolo para el cero que, consecuentemente, no conoce.

El carácter decimal de este sistema no merece en sí un comentario demasiado extenso, habida cuenta de que la agrupación de las unidades de diez en diez se observa en distintas culturas asociándose tradicionalmente al conteo de los dedos de las dos manos. Es conveniente, de todas formas, hacer notar que han existido otras formas de agrupamiento (de 20 en 20, como los mayas, que cuentan los dedos de las dos manos y los dos pies; o de 60 en 60 como hacen los mesopotámicos). También se han encontrado rastros de conteo por grupos de cinco, posiblemente por el empleo de los dedos de una sola mano. Es oportuna esta mención porque Peet afirma que se encuentran rastros de un sistema original de numeración en base cinco:

> "Los números del 1 al 5 tienen nombres parecidos a los nombres africanos (hamíticos), y son parte de la herencia africana de los egipcios. Los números del 6-10 tienen nombres que ofrecen algunas analogías con los nombres semíticos y son de adquisición tardía. Las decenas de la 10 a la 40 tienen nombres especiales que no corresponden ni a aquellos egipcios del 1-5 ni a aquellos de las decenas en los lenguajes hamítico o semítico. Las decenas de la 50 a la 90 están formadas por los números 5-9 de las que quizá son las formas plurales. Estos resultados no deben ser vistos como definitivos, sino que se deben tomar con un considerable sentido crítico"[7].

Los símbolos hieráticos

El lenguaje jeroglífico se grababa en la piedra por medio de cinceles y herramientas rígidas sea de diorita o de cobre. La complejidad de trazado de los símbolos de este lenguaje hablan a las claras de la maestría de estos artesanos de la piedra y, al tiempo, de lo excepcional de su trabajo que no podía multiplicarse en exceso.

Se hizo evidente desde muy pronto que los registros del censo y, en general, de las actividades administrativas no podrían tratarse de la misma manera. Si bien para las pequeñas anotaciones (como las transacciones privadas) se utilizaban los ostraca, trozos de cerámica rota o piedras aplanadas, los grandes registros requerían otro soporte. El escogido fue el papiro, una planta de tallo triangular de varios metros de longitud que crecía abundantemente a las orillas del Nilo, particularmente en la zona del Delta. La médula se cortaba en tiras finas[8] que se dejaban secar disponiéndose luego en unas capas paralelas y otras entrecruzadas. Tras golpear y humedecer este material se transformaba en una materia compacta y lisa que se procedía a encolar al objeto de restarle porosidad (para que la pintura, una mezcla de hollín con agua y goma, no se corriese), secándose finalmente al sol.

Se escribía con un junco cortado al bies y con la punta suavizada hasta conseguir que se transformase en una especie de pincel blando, muy lejos aún del cálamo rígido y afilado que se emplearía a partir del siglo III aC. Con este material la escritura jeroglífica tomará un aspecto distinto, más cursivo (dada la flexibilidad del pincel) y con más economía de trazos (debido a la mayor frecuencia y menor importancia de su utilización). Es la llamada escritura hierática que surge casi al mismo tiempo que la jeroglífica por cuanto el primer período dinástico ya conoce el empleo de ambas.

El trazado de los símbolos numéricos cambia, por consiguiente, sin que pueda hablarse de la simple repetición de los símbolos jeroglíficos sobre el nuevo soporte. En efecto, no sólo los símbolos cambian (recordando sólo en ocasiones al símbolo correspondiente sobre piedra) sino que el propio sistema se modifica.

Símbolos hieráticos del 1 al 9

Símbolos hieráticos de las decenas

El sistema jeroglífico de numeración es lo que se puede denominar una numeración aditiva de primera especie[9] con las características reseñadas anteriormente, mientras que la representación hierática (de tercera especie según la caracterización de Ifrah) ofrece la novedad de que el carácter aditivo es abreviado mediante la introducción de símbolos distintos. Así, las unidades constituyen transcripciones al papiro de los símbolos jeroglíficos pero el cinco sólo muestra tres barras verticales, una de ellas más larga que las demás, el ocho presenta dos trazos horizontales mientras que el siete parece enlazar mediante un trazo oblicuo dichos trazos horizontales. La introducción de símbolos especiales que abrevian y facilitan la aditividad y consecuente acumulación de signos iguales se hace también evidente en las decenas donde a una representación de la decena muy cercana a la del tipo jeroglífico le suceden otros signos distintos de los entonces empleados.

La escritura hierática de los números acarrea así una mayor simplicidad en la cantidad de signos presentes de manera que si 1.929 bóvidos requerían 21 signos sobre piedra sólo precisaba cuatro sobre papiro (como actualmente). Sin embargo, este sistema obliga al aprendizaje y memorización de un número crecido de signos distintos, dado que no considera el valor posicional de estos símbolos y, por tanto, se hace imprescindible distinguirlos entre sí. Escribir un número de cuatro cifras hace necesario memorizar la forma de 36 símbolos diferentes (nueve de las unidades, nueve de las decenas, otros tantos de las centenas y los millares), lo que complica considerablemente el aprendizaje y la lectura de los escribas de la época. Este constituirá un problema irresuelto de la escritura numérica egipcia que, obviamente, no será considerado un verdadero problema en la época como se comprueba por el hecho de que la escritura demótica, que se deriva y sucederá a la hierática hacia el 750 aC, es más cursiva y aumenta las ligaduras, abreviaturas y agrupamientos múltiples de los trazos empleados.

El problema de la medida

Junto a la descripción numérica de un conjunto numeroso (es decir, la cuantificación), las culturas de la Antigüedad conocieron otro contexto en el que inscribir la utilización de los números y la construcción de nuevas relaciones entre ellos: La medida. Esta actividad consiste básicamente en la comparación de una determinada cantidad con otra tomada como unidad respecto de la misma magnitud (sea que midamos la longitud o la superficie o el volumen o cualquier otra). Cuando la relación numérica entre dicha cantidad y la unidad es entera, es decir, que la unidad, repetida un número entero de veces, es igual a la cantidad a medir, no hay un gran problema en asignar un número a esta última cantidad, y así decimos que algo mide 3 metros o 50 metros cuadrados. Cuando la relación no es entera surge la necesidad de utilizar fracciones de la unidad (decímetro como 1/10 del metro, centímetro como 1/100 del metro, etc. en el caso de nuestra forma actual de medir con el sistema métrico decimal).

A este interesante problema, una de las fuentes del empleo de fracciones en la historia de la Matemática, hay que antecederle la elección de la unidad, problema que requiere un consenso histórico y social que no es habitual encontrar con facilidad. Y ello porque no hay unidades ‘naturales’ y aquéllas que podrían parecerlo (como el pie, el paso y, en general, todas las relacionadas con el cuerpo humano o su actividad) no son uniformes: Los pies son de distinto tamaño, los pasos son irregulares, etc.

Desde el punto de vista histórico la medida es una actividad primitiva encontrándose desde muy pronto en todas las culturas. Sin embargo, lo habitual es que con el comienzo de la sedentarización de las tribus nómadas y cazadoras, con la construcción de poblados más o menos permanentes en torno a actividades agrícolas y ganaderas propias del Neolítico, cada poblado, cada ciudad emergente, cada primitivo nomo en el caso egipcio, fuese construyendo sus propias unidades de medida mediante acuerdos sociales o imposición de una autoridad. Surgen así numerosas formas de medida de la misma magnitud que conlleva la dificultad de entenderse en el momento de comerciar. Mientras otros pueblos como el mesopotámico han conocido numerosas formas de medida que sobrevivían largo tiempo, el pueblo egipcio las redujo considerablemente desde el período predinástico, al menos oficialmente. Es evidente que la llegada de un gobierno centralizado necesita crear una administración que recolecte las tasas oportunas y que favorezca, en el caso aquí tratado, el establecimiento de un modelo redistributivo. Todo ello conduce a la conveniencia de extender y unificar en lo posible los sistemas de medida de longitud, de superficies de los campos, de volúmenes y capacidades de los recipientes de grano, de peso de mineral, etc. Lo mismo sucede en otras culturas tan alejadas como la China de la Antigüedad con el emperador Qin Shi Hyang Di (221 aC)[10]. Por otra parte, es potestativo del gobierno de que se trate la construcción de modelos de unidades de medida que sirvan de patrón de referencia como lo fue durante muchos años en nuestra cultura occidental el metro de platino iridiado de París. Lo habitual es que los arqueólogos encuentren modelos diferentes, ejemplares distinto que en el mejor de los casos muestran su medida respecto de la unidad escogida a partir de lo cual se puede establecer cuáles son estas unidades, no siempre únicas, lo que complica el proceso de su desvelamiento[11].

La medida de la longitud

La Piedra de Palermo, una losa de diorita encontrada en Menfis, presenta los sucesos más importantes de las primeras dinastías egipcias durante la mayor parte del Imperio Antiguo. Entre sus anales presenta la primera muestra ‘oficial’ de utilización de la medida para describir la altura alcanzada por el río Nilo que, por ejemplo, en el caso del rey Aha (sucesor de Narmer probablemente) dice:

> “[Año 7]. Aparición del Rey del Alto Egipto. Nacimiento de Min. [Altura del Nilo]: 5 codos.
> [Año 8]. Adoración de Horus. Nacimiento de Anubis. [Altura del Nilo]: 6 codos, un palmo.
> [Año 9]. Primera aparición de la fiesta Sed. [Altura del Nilo]: 4 codos, un palmo”[12].

Observamos que la altura (es decir, una longitud) es descrita en referencia a una unidad (el codo o cubito, como también es traducida) mientras que el palmo parece una subunidad. Pero ¿a qué longitud actual corresponde el codo? ¿Y qué relación tenía con el palmo? La segunda pregunta es más fácil de responder que la primera pero ambas, en todo caso, han sido resueltas.

Hay dos tipos de evidencias respecto a la afirmación de que un codo equivale a 52,3 centímetros, que es el valor actualmente aceptado. En primer lugar, las más directas consisten en encontrar algún modelo de este codo y poco se puede aducir al respecto. Sin embargo, en la tumba del Jefe del Tesoro Maya (dinastía XVIII) aparece una barra de madera cuya longitud coincide con los 52,3 cms al tiempo que muestra las subdivisiones que se conoce que tenía (en palmos y dedos fundamentalmente)[13].

Hay evidencias más indirectas que coinciden con dicha medida. En el papiro Rhind, el principal testimonio matemático de esta civilización, se encuentra un problema de volúmenes (Rhind 41) en el cual se calcula la capacidad de un granero a partir de sus dimensiones expresadas en codos. Al multiplicar las tres dimensiones se obtienen codos cúbicos. Por la transformación que ejecuta el escriba para alcanzar otra unidad de capacidad (el khar), se puede deducir (como así haremos más adelante de manera detallada) que

$$1 \text{ khar} = 2/3 \text{ codo cúbico}$$

Mediante otras relaciones deducibles del problema y de otros problemas del papiro, ello se puede poner en relación con otra medida de capacidad (el hin):

$$1 \text{ khar} = 2/3 \text{ codo cúbico} = 200 \text{ hin}$$

Pero se han encontrado recipientes de esta última unidad de medida (el hin) que aproximadamente son coincidentes en 476,85 cm^3. Si es así, de

$$1 \text{ codo cúbico} = 300 \text{ hin} = 143.056 \text{ cm}^3$$

se deduce que 1 codo = 52,3 cms.

De esta forma, se pueden hacer estimaciones muy aproximadas de los datos que aparecen en la literatura egipcia. Tal es el caso del lago de recreo que construye el faraón Amenhotep III (el padre de Akenathón) para la real esposa Tiy:

> “Su majestad ordenó construir un lago para la Gran esposa Real Tiy en su ciudad de Djaruha. [Mide] 3700 [codos] de largo y 600 codos de ancho. Su majestad celebró la fiesta de apertura del lago en el día decimosexto del tercer mes de la inundación, [cuando] su majestad bogó a través de él en la barca real [llamada] ‘Atón resplandece’”[14].

Con los datos anteriores podemos tener una idea de la generosidad del faraón para su importante esposa real: El lago artificial debía tener casi dos kilómetros de largo por algo más de 300 metros de ancho.

Respecto a las subunidades hay dos que aparecen repetidamente en las medidas realizadas: El palmo y el dedo. En varios problemas del papiro Rhind (los números 56, 58 y 59B) se afirma explícitamente que "un codo son 7 palmos", de manera que la declaración es inequívoca en el sentido de que

1 codo = 7 palmos 1 palmo = 1/7 codo

A ello hay que añadir que cada palmo se dividía a su vez en 4 dedos, de manera que

1 palmo = 4 dedos 1 dedo = 1/4 palmo

y, por tanto,

1 codo = 28 dedos 1 dedo = 1/28 codo

lo que correspondería a un palmo de 7,5 cms y un dedo de 1,8 cms aproximadamente.

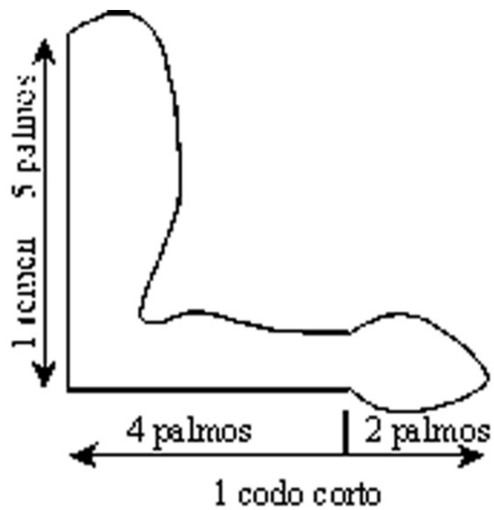
A partir de estas relaciones la cuestión de la medida de longitudes en el antiguo Egipto pudiera darse por cerrada pero es entonces cuando empiezan a aparecer algunas dificultades. Es evidente que estas unidades de medida (codo, palmo, dedo) son de naturaleza antropomórfica, tienen su origen en el cuerpo humano. Sin embargo, cuando se estudian las medidas asignadas en codos a las figuras humanas de aquella civilización (en la pintura o la escultura) se encuentran las mismas unidades pero que corresponden a otras medidas.

En un importante ensayo sobre las proporciones en el arte egipcio, Iversen[15] determina que el 'codo corto (o pequeño)' equivale a 45 cms, en contraposición al primero referido de 52,3 cms que se denomina 'codo real'. El 'codo corto' corresponde a la longitud del antebrazo desde el codo a la punta del dedo medio (tal como refleja el jeroglífico que lo representa). Esta unidad se divide en 6 palmos

1 codo corto = 6 palmos

de manera que cada palmo equivalga a 7,5 cms, igual que en el caso del 'codo real'. Por tanto, el 'codo corto' es simplemente un palmo más corto que el 'codo real', dividiéndose como él en palmos de la misma longitud que, nuevamente, se dividen en 4 dedos cada uno.

Algo más cuestionable es la existencia de una subunidad del 'codo corto' referida a la distancia desde el codo hasta la muñeca (equivalente, por tanto, a 4 palmos, un 'antebrazo') y que se representa con el mismo jeroglífico que la fracción 2/3, lo cual no parece casual puesto que corresponde a 2/3 del codo. De esta forma, otra subunidad sería el 'puño cerrado', equivalente a 2 palmos (1/3 de codo).

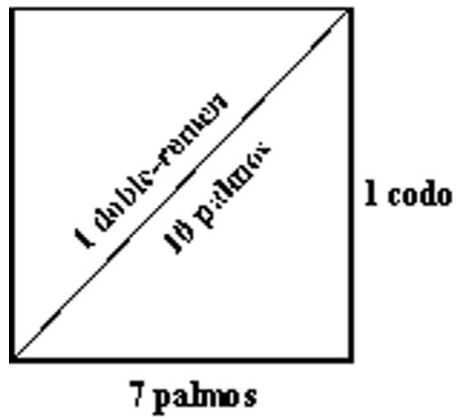


Ya se ha comentado la existencia de diversos sistemas de medida de la misma magnitud en los comienzos de estas civilizaciones pero éste parece ser un caso algo distinto. Si bien es cierto que conviven ambos sistemas basados en codos distintos durante un largo período de tiempo, parece que ambos debían estar refrendados por la administración egipcia inscribiéndose en ámbitos distintos.

El 'codo real' aparece en la descripción de los cultos, en la construcción arquitectónica y en la medida de campos, por ejemplo, mientras que el 'codo corto' aparece fundamentalmente como unidad en las formas artísticas (pintura, escultura) de la época. De ahí que en el papiro Rhind se emplee exclusivamente el 'codo real' ya que se refiere a actividades administrativas propias de un escriba y no de un artista. En todo caso, el 'codo corto' fue abolido en el comienzo del período Saíta, en la referida dinastía XXVI (664 - 525), cuando una reforma metrológica general desterró su uso en beneficio del 'codo reformado' coincidente por lo demás con el 'codo real'.

Iversen defiende la existencia de una nueva subunidad, el 'remen' que, listada inicialmente por Lepsius como 5 palmos, correspondería a la longitud desde el hombro al codo. Esta subunidad, generalmente admitida sin problemas, puede dar lugar al doble de su longitud originando lo que se denomina 'doble-remen' (10 palmos), unidad utilizada en la medida de dimensiones de los campos. Gillings, en su conocida obra sobre las matemáticas egipcias, define este 'doble-remen' como

> "... la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo lado era un codo ... Se piensa que el doble-remen se usaba en la medida de tierras, porque permitía doblar o dividir por la mitad las áreas sin alterar sus formas"[16].



Que el ‘doble-remen’ es muy aproximadamente (pero no de manera exacta) la longitud de dicha diagonal abre la interesante posibilidad aquí apuntada de que para doblar un campo cuadrado de superficie un codo al cuadrado, basta tomar su diagonal (el doble-remen) como el lado de un cuadrado que tendrá una superficie de dos codos cuadrados.

El hecho de que la medida de la diagonal no sea exacta no es importante porque es conocido que los agrimensores egipcios se contentaban en algunas circunstancias con diversas aproximaciones. Sin embargo, no hay evidencias ni directas ni indirectas de esta utilización del ‘doble-remen’. De hecho, la medida de superficies, como veremos a continuación, se basa en el codo pero no utiliza el codo cuadrado por lo que esta interesante hipótesis resulta una especulación más en torno a la posible utilización (nunca probada) del teorema de Pitágoras como relación general y a la consideración de la $\sqrt{2}$ en sus construcciones geométricas.

El ‘codo real’ es una unidad que resulta pequeña para medir las longitudes de los campos ya que obligaría al empleo de números demasiado grandes con la consiguiente dificultad para su cálculo posterior (en primer lugar, para las multiplicaciones que dieran la medida de la superficie). Por ello se empleaba un múltiplo del codo llamado ‘khet’. Mencionado en el papiro Rhind (problema 51) se consideran en él 4 khet que, para los cálculos posteriores, se transforma en 400 codos, lo que indica que

1 khet = 100 codos

es decir, 52 metros y 30 cms.

Medida de superficies

Los papiros administrativos del Imperio Nuevo muestran en muchos casos una relación de tierras correspondientes a un determinado dominio funerario con especificación de su superficie, todo ello con el objetivo de efectuar un censo y determinar las tasas a entregar al templo. La expresión de la superficie se hace a veces en ‘aruras’, término de influencia griega que vino a sustituir a la palabra tradicional que denominaba la unidad de superficie, el ‘setat’.

En el interesante problema 50 del papiro Rhind el cálculo de la superficie de un campo circular se realiza finalmente considerando un cuadrado de 8 khet de lado. El producto de 8 khet x 8 khet resulta en 64 setat, lo que indica que

Un setat es la superficie de un cuadrado de un khet de lado

Dado que 1 khet = 100 codos reales, ello quiere decir que el setat será igual a una superficie de 10.000 codos cuadrados, es decir, unos 2.735 m^2, aproximadamente 2,75 hectáreas. Ello permite tener una idea precisa de la extensión de los campos según los datos encontrados en los papiros. Así, el papiro Louvre AF 6345 relaciona tierras del templo de Menkheperoure-Chepsy pertenecientes al dominio de Amon durante la dinastía XXI (1075 - 945):

> "Parcela de alta tierra situada al oeste de Seger-chag. Aruras: ½ 1/4
> Parcela de alta tierra situada al oeste del templo de Horus señor de Medjaiou. Aruras: 15.
> Parcela de tierra ribereña situada al noroeste de este lugar. Aruras: 5"[17].

Con las relaciones ahora conocidas respecto del setat (o arura), se puede concluir que la extensión de estas tres parcelas sería aproximadamente de unos 2.050 m^2, 41.025 m^2 y 13.675 m^2, respectivamente, equivalente a unos cuadrados de 45, 203 y 117 metros de lado, en ese orden. Ello da una idea más acertada de la importancia relativa de estos campos, si bien la calidad de la tierra es considerablemente importante: La tierra alta (no alcanzada usualmente por la inundación) tenía menos valor que la tierra ribereña, junto al río.

El setat equivalía a la superficie de un campo de unos 52 metros de lado, extensiones que podían resultar demasiado grandes para tierras pequeñas donadas a sacerdotes, soldados o campesinos en general. Por ello se usaban subunidades como el ½, 1/4 ó 1/8 de setat (tal como hemos visto emplear en la descripción del ejemplo anterior) que conocían nombres específicos y que están presentes en diversos ejemplos del papiro Rhind (Problemas 53 y 54, por ejemplo). Al final del Imperio Nuevo, cuando la fragmentación del campo aparentemente fue mayor, se introdujeron subunidades como el 1/16 y 1/32 de arura que, en todo caso, sólo constan en documentos muy tardíos de la civilización egipcia.

Una alternativa frecuente al empleo de las mencionadas fracciones de setat era el que se ha traducido como 'codo de tierra'. En un problema que ha llegado hasta nosotros (Rhind - 55) se considera la formación de un campo de 3 setat extrayendo partes iguales de cinco campos, pidiéndose la superficie de esa parte. En términos matemáticos se desea la expresión de 3/5 de setat que, dada la característica de la matemática egipcia consistente en expresar las fracciones mediante las de tipo unitario, equivalía finalmente a dar la solución

$$3/5 \text{ de setat} = (½ + 1/10) \text{ de setat}$$

es decir, ½ de setat y 1/10 de setat. La primera era una expresión admisible dentro de las fracciones habitualmente utilizadas, pero la segunda no. Por eso el escriba prefiere expresar la solución como

$$½ \text{ de setat} + 10 \text{ 'codos de tierra'}$$

de manera que

$$1/10 \text{ de setat} = 10 \text{ 'codos de tierra'}$$

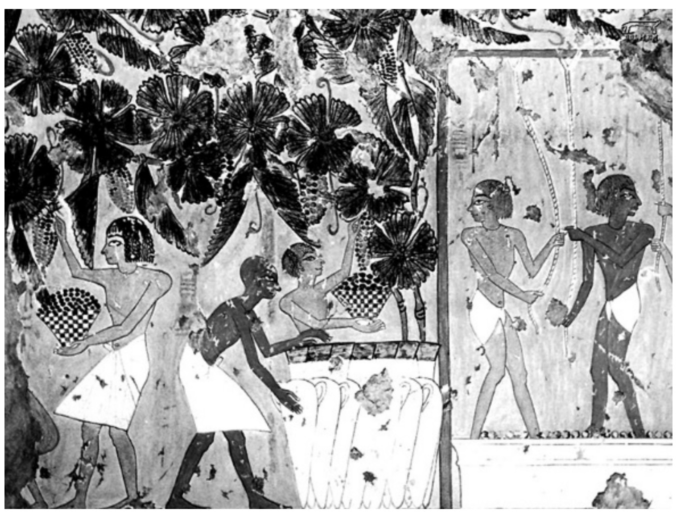
$$1/100 \text{ de setat} = 1 \text{ 'codo de tierra'}$$

En suma, el ‘codo de tierra’ equivalía a la superficie de una franja del setat de 1 khet de largo (100 codos) por 1 codo de ancho, es decir, 100 codos cuadrados (unos 27,3 m^2).

Medida de capacidad

Habitualmente se presentan de manera conjunta e indiferenciada las medidas de volumen y de capacidad aunque, en rigor, miden magnitudes diferentes. El volumen es una magnitud definida como la cantidad de espacio ocupada por un cuerpo mientras que la capacidad se refiere a la propiedad de contener otros cuerpos. El único interés a este respecto de los egipcios se refiere a esta última magnitud: Los graneros debían tener una capacidad determinada, las cestas de grano, los recipientes de bronce en los que guardar cerveza u otros líquidos, etc. Todas estas situaciones se referían a medidas de capacidad, lo que no excluía que se calculasen con medidas de longitud que daban lugar, de manera intermedia, a unidades de volumen no contempladas como tales.

Por ejemplo, en el ya mencionado problema 41 del papiro Rhind, se trata de calcular la capacidad de un granero cilíndrico de un diámetro determinado (en codos) en su base y con una altura dada (en codos). Cuando el escriba halla el área de la base y la multiplica por la altura del granero el resultado obtenido (640) se expresa en codos cúbicos, una unidad de volumen.



Tanto en este problema como en otros del mismo tipo, el escriba transforma a continuación los codos cúbicos (unidad de volumen) en khar (unidad de capacidad) por una regla muy sencilla consistente en añadir a la cantidad de codos cúbicos (640) su mitad (320) de manera que el resultado (960) son khar de grano que puede contener el granero.

El khar entonces es la capacidad de un cuerpo cuyo volumen es de 2/3 de codo cúbico, es decir, 95.370 cm^3. Sin embargo, existían otras unidades de capacidad utilizables con tanta o más frecuencia y, por ello, el escriba volvía a disponer de una sencilla relación de transformación. Así, si consideramos los khar del granero (960) basta dividir por 20:

960 : 20 = 48 cientos de heqats-cuádruples

de manera que el resultado puede darse como 4.800 heqats-cuádruples, otra de las unidades de medida de uso frecuente en el papiro Rhind. Es obvio que la operación realizada equivale a multiplicar simplemente el número de khar por cinco:

$$960 \;.\; 100/20 \;=\; 960 \;.\; 5 \;=\; 4.800 \text{ heqats-cuádruples}$$

o incluso haber dividido por 2 y multiplicado por 10, operaciones muy sencillas de realizar para el egipcio. Sin embargo, la operación realizada muestra que el escriba prefería dividir inicialmente por 20 para obtener 'cientos de heqats-cuádruples' que probablemente funcionarían como un múltiplo con entidad propia.

Este heqat-cuádruple (equivalente a unos 18,2 litros en nuestra medida de capacidad), como su propio nombre indica, resultaba ser un múltiplo de una unidad más básica, el heqat. (unos 4,5 litros), por cuanto

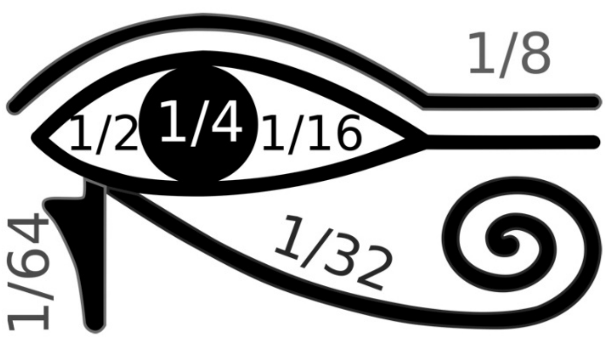
$$1 \text{ heqat-cuádruple} = 4 \text{ heqats}$$

Además

$$1 \text{ khar} = 20 \text{ heqats}$$

Pues bien, las unidades de la izquierda, múltiplos del heqat, son adecuadas para medir la capacidad de grandes cuerpos como los graneros de grano pero resultan improcedentes cuando el escriba tiene que calcular la ración diaria de grano que recibe un trabajador o una porción de medicina, por ejemplo. En la economía cotidiana es necesario considerar como unidad básica el heqat al tiempo que se distinguen una serie de subunidades o divisores del heqat. Y al igual que nos encontramos en el caso de la superficie, volvemos a tropezar con una elección determinada de los escribas egipcios en cuanto a estos divisores de manera que, sin despreciar como luego veremos los divisores basados en el denominador 10, se prefieren los del tipo $1/2^n$.

Estos divisores son seis: ½ , 1/4 , 1/8, 1/16, 1/32, 1/64 de manera que cualquier otra fracción del heqat se expresará en función de una combinación de estas seis fracciones que se conforman como verdaderas subunidades. Es tradicional encontrar la expresión jeroglífica de estos seis divisores agrupados entre sí para que muestren la apariencia del llamado 'ojo de Horus'.



Existían otros divisores del heqat que conviene mencionar. El primero es el 'ro', equivalente a 1/320 de heqat que era utilizado para expresar fracciones muy pequeñas y, al tiempo, para calcular con mayor facilidad sobre estas fracciones tan pequeñas. En efecto, el problema 66 del papiro Rhind presenta 10 heqat de grasa que se reciben en un año, pidiéndose el cálculo de lo recibido por término medio cada día. Evidentemente, esto da lugar a fracciones muy pequeñas de heqat que resultan complicadas de manejar por lo que la solución del escriba pasa por transformar los 10 heqat en ro

$$10 \text{ heqat} = 3.200 \text{ ro}$$

de manera que la división entre 365 se realice entre números enteros.

El último de los divisores del heqat a considerar es una unidad de medida de la capacidad que se emplea fundamentalmente para los líquidos. El 'hin' supone 1/10 de heqat si bien parecen tener orígenes distintos por cuanto los problemas encontrados no suelen mezclar el heqat con el hin y su equivalencia sólo aparece explícita en el problema 80 del papiro Rhind. Algo semejante sucede con el 'oipe', equivalente a 1/4 de khar, aunque ésta ni siquiera consta en su empleo dentro del citado papiro.

La relación del khar con el hin también es constatable de manera explícita. En el Ostraca Gardiner 262 se muestran las raciones de un jefe de trabajadores y un escriba así como el total de lo que suman[18]:

Jefe .... 1/4 1/16 khar + 3 1/3 hin
Escriba .... 1/8 1/32 khar + 1 2/3 hin

Total .... ½ khar

Dado que la suma de las dos cantidades es de

$$1/4\ 1/8\ 1/16\ 1/32 \text{ khar} + 5 \text{ hin}$$

y que el total es de ½ khar, lo que le queda al primer sumando para llegar al total debe ser igual a los 5 hin que se añaden como segundo sumando:

$$1/32 \text{ khar} = 5 \text{ hin}$$

de donde se deduce que

$$1 \text{ khar} = 160 \text{ hin}$$

En líneas generales, se pueden considerar las siguientes relaciones entre estas últimas unidades:

1 khar = 4 oipe = 16 heqat = 160 hin

1 oipe = 4 heqat = 40 hin

1 heqat = 10 hin

Notas

1 Lara, F. (1991): “El Egipto faraónico”, p. 121.
2 Lichteim, M. (1988): “Ancient Egyptian autobiographies chiefly of the Middle Kingdom”, p. 32.
3 Ifrah, G. (1987): “Las Cifras. Historia de una gran invención”.
4 Ibid.
5 Lara, F. Op. cit, p. 76.
6 Ibid, p. 122.
7 Peet, T.E. (1923): “The Rhind Mathematical Papyrus”, p. 11.
8 Dahl, S. (1987): “Historia del libro”.
9 Ifrah, G. (1994): “Historia universal de las cifras”.
10 Maza, C. (2000): “Las Matemáticas de la Antigüedad y su context histórico”.
11 Valbelle, D. (1977): “Catalogue des poids à inscriptions hiératiques de Deir-el-Medineh”.
12 Lara, F. Op. cit, p. 35.

13 Clagett, M. (1990): “Ancient egyotian science. A source book”. Vol. III.
14 Serrano, J.M. (1993): “Textos para la historia antigua de Egipto”, pp. 122-123.
15 Iversen, E. (1975): “Canon and proportions in Egyptian art”.
16 Gillings, R.J. (1972): “Mathematics in the Time of Faraons”, p. 208.
17 Gasse, A. (1988): “Données nouvelles administratives et sacerdotales sur l’organistion du domaine d’Amon” Vol. 1, p. 8.
18 Janssen, J.J. (1991): “Rations with Riddles”.

Capítulo 5
El trueque y las operaciones aritméticas

Primeros casos de trueque

> “Érase una vez un hombre, Khunianupu de nombre, que era un fellah de la llanura de la Sal... Este fellah le dijo a su mujer:
> - Eh, tú, voy a Egipto para comprar el pan de nuestros hijos...
> Cuando el fellah bajó a Egipto, cargó sus asnos con cañas de bambú, juncos, natrón, sal, madera de Uîti, de acacia del País de los bueyes, de pieles de lobo, de cueros de chacal, de salvia, de ónice, de gualda, de coloquíntida, de coriandro, de anís, de talco, de piedra ollar, de menta silvestre, de uvas, de palomas, de perdices, de codornices, de anémonas, de narcisos, de granos de sol, de Cabellos de tierra, de pimientos, todo lleno de los buenos productos de la llanura de la Sal”[1].

Hubiera resultado de gran interés desde el punto de vista económico lo que llegó a hacer el fellah con todos sus productos antes de que se cruzara en su camino un siervo del alcaide que le sustrajo todas sus pertenencias con abuso de autoridad. Sin embargo, este famoso cuento sobre las quejas del fellah, situado en el transcurso del Primer Período Intermedio, ilustra sobre el propósito de los campesinos de entregar sus excedentes (los buenos productos de su tierra) para obtener otros productos de alimentación.

Se comentó en el capítulo 3 que el trueque, el intercambio de estos productos, era la forma más habitual de conseguir lo que se deseaba. Ahora bien, ¿dónde se desarrollaba dicho intercambio? ¿Dónde iba el fellah del cuento? Una de las grandes dificultades del trueque es la doble premisa del mismo: Se ha de encontrar a la persona que quiera lo que yo tengo y que, además, tenga lo que yo quiero. Esto no es siempre fácil y se resuelve mediante dos procedimientos: Buscando a la otra persona en el lugar adecuado y llegando a un acuerdo sobre el valor de las mercancías a intercambiar.

Se ha discutido sobre la existencia o no de grandes mercados, los lugares siempre más adecuados para el intercambio, y cuya presencia en la civilización mesopotámica (particularmente, en la cultura asiria) parece adecuadamente aceptada. El fellah podía dirigirse a uno de estos mercados o, simplemente, tender sus productos en medio del camino para que los viandantes se acercaran a interesarse, aunque esto último parece poco creíble dado lo improbable de encontrar a alguien que cumpliese la doble premisa del trueque.

No hay constancia alguna de la existencia de grandes mercados, ni en cuanto a posibles restos arqueológicos en las pocas ciudades cuyo rastro se ha conservado, ni en las imágenes que los egipcios nos legaron. Tan sólo se han aducido los testimonios encontrados en la tumba de Ipy, un escultor del poblado de Deir el-Medineh, y en la de Kenamum, un alcalde de Tebas durante el Imperio Nuevo. En ambas se encuentran escenas similares: La llegada de unos barcos cargados de mercancías da lugar a la presencia de unas mujeres sentadas sobre pequeños taburetes y rodeadas de mercancías propias (pescado, hortalizas, panes, vasijas de bebida)[2]. Son escenas de intercambios y trueques entre unos y otras pero no parecen constituir un mercado en su sentido más amplio. Tal parece que, mientras los hombres trabajan en el campo, las mujeres se acercan al embarcadero donde llegan los comerciantes venidos de otras tierras al objeto de cumplir el objetivo que expresaba el fellah del cuento. Sin que sea posible hablar de mercado, sí hay lugares más propicios para el trueque de mercancías donde encontrar personas interesadas en dicho intercambio.

Una vez que las personas mutuamente interesadas se encuentran es necesario llegar a un acuerdo sobre cuánto dar y cuánto recibir por parte de cada uno. Es posible que esta actividad empezase con un regateo y con un trueque directo con intercambio inmediato de las mercancías. Sin embargo, algún testimonio del Imperio Antiguo muestra una forma distinta de realizar el intercambio. En 1910 se encontraba junto al templo asociado a la pirámide de Keops una estela de piedra que fue datada en la IV ó V dinastía. En ella se declara la adquisición de una casa de "construcción a cordel, techo [inacabado] en madera de sicómoro"[3] por la que Serefka, administrador de la villa, le da al escriba Tjenti la cantidad de

Una pieza de tela de 4 por 10 codos: 3 shatis.
Una cama '*jt*': 4 shatis
Una pieza de tela de 2 por 10 codos:3 shatis

Este documento administrativo aparece sellado por el 'Servicio del Sello' ante el Consejo local de la villa de la pirámide de Keops y ante diversos testigos probablemente de ambas partes. Tal aparato jurídico indica que el intercambio no fue inmediato pudiéndose entregar las mercancías antes de poder ocupar la casa o al revés. A este hecho hay que añadir el valor estandarizado que se añade junto a los productos que proporciona el comprador. Cada uno de ellos aparece con un precio medido en ‘shatis’, cuya entidad es difícil de precisar pero que, indudablemente, parece expresar una forma de dinero, es decir, un valor estandarizado de un producto al que referir el precio de otros productos.

Medidas de peso y precio

Egipto careció durante largo tiempo de moneda, es decir, de una pieza acuñada a la que se le da un valor estandarizado para que se utilice de intermediario aplazado en la compra y venta. Sin embargo, a pesar de esta carencia se puede recurrir a un elemento que actúe como dinero o, en otras palabras, que cumpla el papel de la moneda sin que constituya una pieza acuñada. Uno de los que cumplieron tal papel en el antiguo Egipto fue un peso determinado de cobre, el ‘deben’ (91 gramos). También existía un ‘deben’ de plata o de oro, pero era algo más excepcional limitándose al Imperio Nuevo y siendo más habitual en documentos administrativos, antes que expresando intercambios entre particulares.

En el papiro Rhind, cuyos contenidos se remontan al menos al Imperio Medio aunque su redacción sea posterior, se encuentra un problema del que se puede deducir la relación entre el deben y el shati que hemos encontrado en el Imperio Antiguo. Así, se dice:

> “**Rhind - Problema 62:** Ejemplo de cálculo de un saco conteniendo varios metales preciosos. Si se te dice: ‘Un saco conteniendo [pesos iguales] de oro, plata y plomo es comprado por 84 shati, ¿cuál es la cantidad de cada metal precioso? Lo que es dado por un deben de oro es 12 shati, para la plata es 6 shati, y para el plomo es 3 shati”.

Cuando el deben era de cobre conocía pocos divisores salvo fracciones variadas del mismo entre las que destacaba por su propia entidad ‘medio deben’. Sin embargo, cuando el deben era de plata (más frecuente que el de oro) se utilizaba la décima parte del deben al que se llamaba ‘kite’[4] (unos 9 gramos)

1 kite de plata = 1/10 deben de plata

Esta fracción tan pequeña del deben no era utilizada para el cobre puesto que 9 gramos de este último metal era una cantidad de muy escaso valor para expresar con ella las

mercancías habituales. Sin embargo, sí se dispone de la equivalencia entre los valores relativos del cobre y la plata, de manera que 1 kite de plata = 10 deben de cobre
lo que viene a expresar una relación:

tal como se deduce de un documento judicial encontrado por Gardiner en un papiro (Pap. Cairo 65739) donde se narra cómo el soldado Nakhi acusa a la dama Erênofre de irregularidades (la apropiación ilegal de bienes de la dama Bekmut) en la compra de dos esclavos[5]. Por ello, la acusada hace la siguiente declaración:

> "Y en el año 15, siete años después de haber entrado en la casa del superintendente de Simut [su esposo], el mercader Recia se me acercó con la esclava siria Gemnihiamente, siendo una joven y me dice: 'Toma esta joven y dame un precio por ella'. Así me dijo. Y yo le compré la joven y le dí [un precio] por ella. Declararé ahora frente a las autoridades el precio que dí por ella:
> 1 mortaja de paño de Egipto-norte, toma 5 kite de plata.
> 1 manto de paño de Egipto-norte, toma 3 1/3 kite de plata.
> 1 prenda '*d3yt*' de paño de Egipto-norte, toma 4 kite de plata.
> 3 prendas '*sdy*' de paño de Egipto-norte, toma 5 kite de plata.
> 1 vestido de fino paño de Egipto-norte, toma 5 kite de plata.
> Comprado del ciudadano Kafy, 1 jarra '*g3y*' de bronce '*hsmn*', toma 18 deben, toma 1 2/3 kite de plata.
> Comprado del jefe de almacén Pyiay, 1 jarra '*g3y*' de bronce '*hsmn*', toma 14 deben, toma 1 ½ kite de plata.
> Comprado del sacerdote Huy-Pinhes, 10 deben de cobre batido, toma 1 kite de plata.
> Comprado del sacerdote Pniy, 1 jarra '*g3y*' de bronce '*hsmn*', toma 16 deben, toma 1 ½ kite de plata; 1 jarra '*mnt*' de miel, toma 1 hekat, toma 5 kite de plata.
> Comprado del ciudadano Tjuiay, 1 caldera de bronce '*hsmn*', toma 20 deben, toma 2 kite de plata.
> Comprado del administrador de la casa de Amon, 1 jarra '*kbt*' de bronce '*hsmn*', toma 20 deben, toma 2 kite de plata; 10 camisas '*mss*' de fino paño de Egipto-norte, toma 4 kite de plata.
>
> **Total, 4 deben, 1 kite de plata** en todas las cosas.
>
> Le doy al mercader Recia, no estando [comprendido] en esto ningún artículo de la ciudadana Bekmut. Y él me da esta joven y le doy por nombre Gemnihiamente"[6].

Dada la relación entre deben y kite de plata, el total puede expresarse como 41 kite de plata, de los cuales los bienes directos de la dama Erênofre corresponden a 22 1/3 kite. Eso quiere decir que el conjunto de otros bienes 'comprados' (o posiblemente tomados en préstamo) a otras personas alcanza los 41 - 22 1/3 = 18 2/3 kite de plata como es posible comprobar sumando las expresiones en kite.

En esta última parte se trazan varias equivalencias entre los deben de cobre (aunque no se mencionan como tales salvo en una ocasión) y los kite de plata que, en general, parten de que

1 kite de plata = 10 deben de cobre

aunque hay aproximaciones cuando se ha de trabajar con fracciones de kite. Así, 18 deben dan lugar a 1 4/5 kite (y no a 1 2/3 kite como se expresa en el papiro), 14 deben equivale a 1 2/5 kite (y no a 1 ½) mientras que 16 deben debería expresarse como 1 3/5 kite (y no como 1 ½). Indudablemente, las fracciones aproximadas finalmente tomadas son más sencillas de manejar a efectos de operar con ellas, lo que justifica la admisión por el escriba de un pequeño error.

En todo caso, obsérvese a través de este ejemplo cómo era necesario en los intercambios realizar la suma de varias cantidades, en no pocas ocasiones con el añadido de la transformación entre unidades o de unidades con sus divisores. Cuando en los ostraca o papiros se recogen estos trueques es muy habitual que tomen la forma de largos listados de mercancías a los que puede añadirse su precio uniforme en deben (u otras unidades) de manera que es obligado que su suma total corresponda a la cantidad pedida por la otra persona. Teniendo como referencia la cantidad final (4 deben 1 kite de plata) podemos imaginar a la dama Erênofre o a su administrador acumulando objetos de paño, jarras de bronce y otros productos calculando a cada paso la cantidad que queda hasta completar el precio pedido por la esclava. Ello constituye a su vez una forma de resta entendida como la búsqueda del complementario de una suma (¿qué cantidad B le queda a A para llegar a T si A + B = T?

Suma y resta de cantidades

La suma era una operación habitual en la realización de intercambios comerciales, como acabamos de ver, pero también en otros ámbitos que ahora sólo mostraremos a través de un ejemplo sencillo. Gran parte de la actividad administrativa de los templos y dominios reales suponía la contabilidad de las tierras, de las cantidades recibidas como donación o por la aplicación de tasas, de los objetos de culto, etc. Entre los numerosos ejemplos de estas largas relaciones cuyos subtotales era necesario calcular sistemáticamente ofrecemos sólo un caso bastante simple que aparece en el papiro Harris, las donaciones en oro fino que el faraón Ramsés III proporciona al templo para asegurar el culto[7]:

Productos	Deben	Kite
Oro fino, total 42	21	
Oro fino trabajado, anillos de Asia 22	3	3
Oro fino incrustado, anillos de Asia 9	1	3 1/2
Oro fino trabajado, con incrustación de piedras preciosas, 1	22	5
Lápida cortada de oro fino, 1	9	5 1/2
Total de oro fino en el equipo	**57**	**5**

Para realizar la suma total que aparece en la parte inferior, se procede a sumar las cantidades superiores (los deben) hasta totalizar 56, a lo que habrá que añadir la suma de kite, que alcanzan los 17, es decir 1 deben y 7 kite (lo que revela un pequeño error en el cálculo del escriba ya que la relación 1 deben = 10 kite es constatable en otras partes del documento).

La suma, pues, es habitual, una operación aritmética sencilla para la que, a pesar de ello, no se dispone de todas las respuestas respecto de su realización por los antiguos egipcios.

Supongamos que debemos realizar la suma de los deben que aparecen en la columna de la tabla anterior. Escrito en forma jeroglífica aunque cambiando, como se conviene habitualmente, el sentido derecha-izquierda de su disposición, se tendría:

```
∩ ∩       /          2 1
        / / /          3
        /            1
∩ ∩      / /         2 2     +
        / / / / /
         / / / /          9
---------------------------------
∩  ∩∩ ∩ ∩     / / /     5 6
                / / /
```

Pero esta forma de representación no tiene por qué ser en modo alguno la que utilizara el escriba egipcio. En primer lugar porque el sistema de notación es aditivo en sí mismo por lo que para la representación de la suma basta yuxtaponer los signos de que se dispone y no es necesario disponer los sumandos de forma vertical haciendo coincidir las unidades entre sí, las decenas con las decenas, etc., disposición que imita la actual donde sí es conveniente adoptar la coincidencia de unidades del mismo orden dado que las cifras aparecen indistintamente en cualquier orden. Así, pues, la yuxtaposición de signos daría lugar a

```
∩ ∩ ∩ ∩ / / / / / / / / / / / / / / / /
```

y aquí comienza otra discrepancia. Para Peet[8] la suma concluiría con el conteo uno a uno de las representaciones de la unidad (uno-dos-tres-cuatro-...-diez-once-...-dieciseis) de manera que se separaran diez de estas unidades pasando a sustituirse por la representación de una decena:

```
∩ ∩ ∩ ∩ ( / / / / / / / / / / ) / / / / / /     40 + (10) + 6
            ∩ ∩ ∩ ∩ ∩  / / / / / /          5 6
```

Para Gillain[9], en cambio, la operación es realizada mentalmente de manera que el escriba no representaría todas las unidades sino que agruparía mentalmente diez unidades transformándolas en su decena equivalente, es decir, efectuando el paso 40 + (10) + 6 mentalmente en vez de por escrito.

Es conocido que el niño que aprende actualmente la escritura numérica en unidades y decenas precisa durante un tiempo representar todas las unidades antes de agruparlas en una decena mediante el empleo de materiales didácticos adecuados (diez palitos atados, diez garbanzos en una bolsa, etc.)[10] pero esto se reduce a una fase muy temprana del aprendizaje. Se hace evidente entonces la ventaja con que las operaciones mentales van sustituyendo las operaciones concretas que se realizan manualmente o por escrito, sustitución que es más evidente entre escribas adultos y experimentados en este tipo de operaciones.

Sin embargo, lo que hace toda esta discusión probablemente irrelevante es que resulta muy improbable que las operaciones aritméticas realizadas por los escribas se expresaran en lenguaje jeroglífico. Hay que recordar que el hierático surge en un momento tan cercano respecto al jeroglífico que los escasos testimonios de la época no permiten diferenciar el momento del nacimiento de uno y otro. Por otra parte, sumar es una operación, una acción mental que se representa por escrito, pero no es un resultado. Resulta inimaginable que el proceso de sumar (con sus acciones intermedias) se pueda representar sobre piedra sino que ha de hacerse sobre arena, como la cultura india, sobre barro, como los mesopotámicos, pintando sobre pedazos de cerámica o de piedra, como los ostraca egipcios. Pero sobre este material se escribía en lenguaje hierático, no jeroglífico. En otras palabras, en jeroglífico y sobre piedra se pueden representar las cantidades o el total de una suma pero no los pasos intermedios que caracterizan el proceso de la operación. En cambio, resulta más sencillo representar este proceso dibujando sobre un ostraca y el lenguaje empleado ahora sería el hierático. De hecho, el papiro Rhind y todos los demás testimonios matemáticos encerrados en papiros así como las anotaciones que aparecen en los ostracas no literarios están exclusivamente en hierático y en él las representaciones de las distintas unidades son distintas entre sí. Es decir, que el sistema hierático de numeración no puede simplemente yuxtaponer sus unidades para agruparlas en unidades de un grado mayor. Así, la suma anterior se escribiría así

Como es fácil de apreciar no cabe la mera yuxtaposición de signos sino que se hace imprescindible la resolución mental de la suma de operaciones, tal como el propio Peet defendía para este lenguaje. Ahora bien, la resolución mental de la suma 9 + 7, por ejemplo, no significa que el escriba vaya contando mentalmente una a una hasta completar dieciseis unidades, sino que los resultados se memorizan debido a su utilización habitual.

A ese respecto, Gillings[11] sostiene la conveniencia de utilizar tablas de sumas por parte de los escribas de la época en base a varios argumentos: La escasez de errores observados en estas operaciones, el hecho de que existan tablas de sumas de fracciones y la conveniencia que suponen estas tablas no sólo para obtener resultados de sumas sino también para restas sencillas. En efecto, esta tabla podría tener el siguiente formato[12]

2 9 11   2 8 10   2 7 9   2 6 8   2 5 7   2 4 6   2 3 5

3 9 12	3 8 11	3 7 10	3 6 9	3 5 8	3 4 7
4 9 13	4 8 12	4 7 11	4 6 10	4 5 9	
5 9 14	5 8 13	5 7 12	5 6 11		
6 9 15	6 8 14	6 7 13			
7 9 16	7 8 15				
8 9 17					

Desde luego, ninguna de estas tablas, al contrario que las correspondientes a sumas de fracciones, ha llegado hasta la actualidad pero ello no quiere decir nada teniendo en cuenta la escasez de documentos que se han conservado. Ahora bien, la escasez de errores no es determinante porque la suma mentalmente realizada no tiene por qué ser una operación complicada cuando tiene lugar entre números enteros, al contrario que cuando se hace entre fracciones. En otras palabras, la existencia de tablas para la suma resultaría conveniente en el aprendizaje del escriba por cuanto le permitiría practicar estas operaciones pero no resulta imprescindible para un escriba adulto y experimentado.

Ahora bien, estas tablas ponen en evidencia la estrecha relación entre las operaciones de suma y resta. Son más abundantes los testimonios sobre sumas, varios de los cuales hemos expuesto anteriormente, pero son más raros los correspondientes a sustracciones como tales aunque tendrían que realizarse en la práctica. Si se suman las cantidades recibidas como donaciones para garantizar el culto habría que restar al depósito general de dichas mercancías todo aquello que se fuera consumiendo con el paso del tiempo para tener siempre presente las existencias actualizadas. En esta línea estarían expresiones como la que aparece en un problema del papiro Rhind: “Quitar [a 9] 1/9 de 9, es decir, 1; el resto es 8" (Problema 41).

Sin embargo, son muy frecuentes otras formas de referirse a la resta entre dos cantidades. Por ejemplo, “Calcular el exceso de 45 sobre 10; es 35" (Rhind - 72), “Completar 2/3 1/30 hasta 1" (Rhind - 22). Ello estaría en la línea de resolver la resta ‘minuendo menos sustraendo’ a través de la suma de una cantidad desconocida al sustraendo para obtener el minuendo. En ese sentido, las tablas de sumas serían en realidad tablas de descomposiciones de números de manera que

$$\begin{aligned} 11 &= 10 + 1 \\ 11 &= 9 + 2 \\ 11 &= 8 + 3 \\ 11 &= 7 + 4 \\ 11 &= 6 + 5 \end{aligned}$$

permitiera resolver tanto un problema de suma (8 + 3 = ?) como uno de resta (8 + ? = 11).

Otras medidas del precio

En algún momento de su reinado Tutmosis I (1493 - 1483) decidió que su hipogeo estaría situado en un nuevo lugar cerca de Tebas, un valle que en la actualidad se conoce como de los Reyes por constituir el enterramiento de un gran número de faraones del Imperio Nuevo. De manera más o menos simultánea debió escoger una región cercana, conocida hoy como Deir el-Medineh, para la erección de un poblado que albergase a todos los artesanos necesarios para la construcción de su tumba y la de sus sucesores. Aunque pasó diversas vicisitudes (entre ellas, un incendio que lo destruyó en tiempos de Akhenatón) en su apogeo, probablemente bajo

Ramsés II, el poblado ocupaba una superficie de 132 metros de larga por 50 metros de ancha, con unas 70 casas dentro del perímetro de sus murallas y unas 40 fuera de él[13].

Además de las tumbas encontradas (algunas de ellas conteniendo papiros) han proporcionado información sobre la vida cotidiana los depósitos de ostracas acumulados en los que se registran transacciones, listas de obreros, cuentas de ladrillos y otros materiales de construcción, registros administrativos de mercancías, además de textos literarios o médicos.

Si bien la publicación de los ostracas no literarios fue obra de Jaroslav Cerný en la primera mitad del siglo pasado, los datos que aquí se van a manejar corresponden al estudio de Janssen[14] sobre el precio de las mercancías que es posible deducir del estudio de dichos ostracas. En él nos muestra, entre otras cosas, formas de intercambio de bienes expresables en otras unidades que no eran el deben o el kite, la forma más habitual.

> "O. Michael 14,4: Un par de sandalias y unas [cestas] 'mndm' y 'nkr' = ½ sniw. Si las sandalias son baratas costarán al menos 1/4 sniw, aunque normalmente son más caras; 3/8 sniw sería una conjetura razonable, dejando 1/8 sniw para las cestas"[15].

El 'sniw' parece haber s ido una pieza de plata equivalente, según Cerný, a 1/12 deben de plata, es decir, un peso de unos 7,6 gramos de dicho metal. Considerando la relación entre el cobre y la plata existente en los tiempos de Ramsés IX (1:60) antes que en los de Ramsés II (1:100 como se ha visto más arriba), resultaría que

Las fracciones que se utilizan de este valor (el sniw) suelen ser el ½ sniw y una unidad de capacidad ya conocida (el hin) que se hace equivaler a 1/6 sniw (aproximadamente un deben de cobre).

El tercer sistema de determinación del precio de una mercancía se hacía directamente mediante unidades de capacidad, en concreto, utilizando el khar. Esta era una unidad más frecuente en los precios de los cestos (y los había de distinta forma y tamaño, algunos de ellos difíciles de determinar). Como algunos objetos (particularmente los metales como el cobre, la plata, el plomo o el oro) tendrían inicialmente un precio asociado a su peso, lo que condujo a tomar el peso como unidad de precio, de igual manera los precios de los cestos vendrían determinados por su capacidad para almacenar grano de modo que era natural emplear estas unidades de capacidad que se extenderían con facilidad a otras mercancías, habida cuenta de que el grano formaba parte de numerosos trueques de la vida cotidiana.

> "Hier. Ostr. 28,4,4 (final dinastía XIX): 3 cestos 'kbs' y 1 ½ khar de trigo [claramente el contenido de los cestos] son valorados en 3 khar [de cebada]- es decir, ya que un cesto 'kbs' contiene ½ khar, 1 ½ de trigo cuesta 1 ½ de cebada"[16].

El khar de capacidad podía aparecer con el sniw de plata, relacionando las dos últimas formas de fijación del valor de una mercancía:

> "O. Gardiner 286 (segunda mitad de la dinastía XIX): Tres sacos 'h3iw' son cambiados por un cesto 'dnit', una esterilla, y un [cesto] combinado 'mndm' y 'nkr', todo ello valorado en 2 ½ khar. El [cesto] 'dnit' se dice que cuesta ½ [sniw]

> y las otras dos entradas se valoran en 1 1/4 y 1/4 khar, lo que significa que 1 khar es igual a ½ sniw”[17].

Esquemáticamente:

```
2 ½ khar  = Cesto ‘dnit’ + Esterilla  + Cesto ‘mndm + nkr’
                  ½ sniw          1 1/4 khar       1/4 khar
-----------------------------------------------------------
2 ½ khar    =    ½ sniw                   1 ½ khar
```

de donde   1 khar = ½ sniw

Dado que el khar es una unidad de capacidad de un tamaño considerable (equivalente a más de 76 litros) es frecuente acudir a divisores suyos como el oipe (1/4 khar en el Imperio Nuevo) tal como muestran los dos ejemplos siguientes:

> “O. DeM. 50 (final de la dinastía XIX): En las líneas 3-4 una esterilla y un cesto ‘kbs’ son valorados juntos en 2 oipe, y una pieza de vestido en 1 oipe, haciendo en total ½ sniw, es decir, 1 khar = 2/3 sniw”[18].

En efecto,

```
Esterilla + Cesto ‘kbs’   +   1 vestido   =   ½ sniw
---------------------------      -----------       ------
            2 oipe                     1 oipe            ½ sniw ------------------------------------------------
 --------
                          3 oipe                           ½ sniw
```

Considerando que un oipe es 1/4 de khar, se puede expresar esta igualdad como:

$$3/4 \text{ khar} = ½ \text{ sniw}$$

de donde

$$1 \text{ khar} = 2/3 \text{ sniw}$$

> “Hier. Ostr. 54,2,3-4 (Ramsés III): Una cantidad de madera es valorada en 1 sniw, y -si mi interpretación es correcta- su contravalor, consistente en 1 par de sandalias, 1 viga y 1 cesto ‘kbs’, es de 10 oipe, así que 1 khar = 2/5 sniw”[19].

```
1 sniw    =    Par de sandalias + Viga + Cesto ‘kbs’
--------         ---------------------------------------------
1 sniw                        10 oipe
```

de donde: 1 oipe = 1/10 sniw

que permite deducir:

$$1 \text{ khar} = 4 \text{ oipe} = 4/10 \text{ sniw} = 2/5 \text{ sniw}$$

que, como se puede observar, es una relación algo diferente de la anteriormente encontrada.

Una vez relacionado el khar (y su divisor el oipe) con el sniw, también se encuentran casos en que se relacionan entre sí las unidades de capacidad (en concreto el oipe) con las de peso (el deben), como en el caso de préstamo siguiente:

> "Hier. Ostr. 72,3 (año 23 de Ramsés III). El alquiler de un asno ... por un período de 80 días, cuesta 20 deben. Pero Helk ha señalado a partir del O. DeM. 69,2 (mitad de la dinastía XX) que el alquiler diario para un asno era probablemente de ½ oipe ... Combinando estos, el resultado debe ser: 1 khar = 2 deben"[20].

En efecto, si ½ oipe es el precio por día y el alquiler es de 80 días, el alquiler total es de

½ oipe x 80 días = 40 oipe

pero ello significa que

40 oipe = 10 khar = 20 deben

de donde

1 khar = 2 deben

En líneas generales se puede trazar un cuadro de las principales relaciones numéricas entre las tres unidades de precio utilizadas en el pueblo de Deir el Medineh a partir de las establecidas hasta ahora y de las que es posible deducir de ellas. Es necesario observar que estas relaciones no eran completamente estables en el largo período de tiempo que examina el trabajo de Janssen y, de igual manera que se encuentran una relación diferente entre 1 khar y los sniw que le corresponden, otras relaciones muestran variaciones que no serán tenidas en cuenta en la tabla de relaciones en beneficio de las más frecuentes.

	Deben cobre	Sniw	Hin	Khar	Oipe
Deben cobre	1	1/5	1 1/5	1/2	2
Sniw	5	1	6	1 1/2	10
Hin	5/6	1/6	1	5/12	1 2/3
Khar	2	2/5	2 2/5	1	4
Oipe	1/2	1/10	3/5	1/4	1

A partir de esta tabla se puede trabajar sobre casos tanto comprobables como otros hipotéticos que permiten analizar las operaciones matemáticas (suma y resta por el complemento) utilizadas en todos los trueques basados en una unidad de precio de referencia.

Uno de los últimos podemos suponer que sea la venta de un ataúd. El artesano presenta su precio que comprende los siguientes términos[21]:

Madera necesaria .... 1 sniw
Confección del ataúd .... 4 sniw + 2 oipe
Decoración del ataúd .... 4 deben
Total .... 5 sniw + 4 deben + 2 oipe
Dado que cada sniw es igual a 5 deben y 1 oipe es igual a ½ deben, se alcanza un

Total .... **30 deben**

Ahora el comprador debe reunir mercancías por un valor final de 30 deben, lo que implica uno de dos procedimientos:

1) Puede ir sumando de forma acumulada los objetos que va a dar al artesano comparando en cada paso lo acumulado con la cantidad final (30 deben), o bien

2) Puede ir restando de forma sistemática cada objeto considerado de la cantidad que debe entregar al artesano, con lo que esa cantidad a débito irá decreciendo hasta desaparecer.

Un ejemplo de mercancías podía ser[22]:

Mercancía	Precio total	Suma acumulada	Cantidad a débito
Par de sandalias	2 deben	2 deben	28 deben
3 hin aceite	1/2 sniw = 2 1/2 deben	4 1/2 deben	25 1/2 deben
5 cestos ‘kbs’	5 deben	9 1/2 deben	20 1/2 deben
2 cestos ‘krht’	3 deben	12 1/2 deben	17 1/2 deben
1 cerdo	4 1/2 deben	17 deben	13 deben
Cebada	?	30 deben	0 deben

A partir de estos datos se plantearía en la parte final otro interesante problema: Determinar la cantidad en khar de cebada que es necesario añadir para que el precio total de la cebada alcance los 13 deben. Teniendo en cuenta, según la primera tabla, que 1 khar equivale a 2 deben, serían necesarios 6 ½ khar de cebada, o bien, 6 khar + 2 oipe.

El préstamo

En ocasiones es difícil distinguir una simple operación de trueque de otra que podría denominarse ‘préstamo’. Basta simplemente que el intercambio de mercancías sea diferido en el tiempo para que el trueque se convierta en un préstamo por cuanto se da una cantidad a la espera de que se ‘devuelva’ dicha cantidad en forma de otras mercancías un tiempo después.

Existen testimonios de este tipo de préstamos desde al menos el Primer Período Intermedio en que el noble Ankhtyfy el Bravo manda inscribir en su tumba a raíz de la hambruna existente tras el colapso del Imperio Antiguo:

> “Hice que el cereal del sur fuera rápido corriente arriba, hasta alcanzar el país de Uauat, y corriente abajo hasta alcanzar el nomo de Tinis. Todo el Alto Egipto se moría de hambre, hasta el punto de que todo hombre se comía a sus hijos. Pero yo no permití que nadie muriera de hambre en este nomo. He proporcionado préstamo [de cereal] al Alto Egipto...”[23].

aunque el préstamo se confunde con un servicio de los responsables de la administración dentro de la economía redistributiva hasta el punto de que puede convertirse en una donación hecha al pueblo que está a su cargo, como se puede deducir de las palabras del nomarca Ameni en los tiempos de Sesostris I:

> “Cuando llegaron los años de hambre, labré todos los campos del nomo Oryx hasta sus límites del sur y del norte, conservando a la gente con vida y suministrándoles alimentos en forma que no hubiera hambre allí... Entonces llegaron grandes Nilos,

> poseedores de grano y de todo tipo de cosas, [pero] no recaudé las deudas atrasadas de la tierra”[24].

El préstamo entre particulares, sin embargo, es infrecuente antes del Imperio Nuevo y suelen ser contratos verbales ante testigos y sin que medie interés alguno. Durante este último período se va generalizando la consignación por escrito y el establecimiento de compensaciones por el uso que, inicialmente, toman la forma de sanciones en caso de no devolución en el plazo requerido:

> “O. Berlín 10655 (Primera mitad de la dinastía XIX): Tercer mes de la estación Shemu, día 9. En este día, queja del obrero Amenemope [contra] el portador de agua Pennout, de la Tumba, ante el jefe de equipo Khonsu y el escriba Amontou, por [la que] dice: ‘Si yo dejo de venir el último día del tercer mes de Shemu sin dar 20 deben de este cobre a Amenemope, seré merecedor de 100 golpes y ellos [los 20 deben] serán contra mí en el doble’”[25].

Esta sanción (el doble de la cantidad prestada) era habitual en los últimos tiempos del Imperio Nuevo lo que obligaba a realizar sumas de diversas cantidades. El papiro Turín PR IX[26] narra el caso de un préstamo algo difícil de interpretar y por el que 10 sacos objeto de un préstamo se van transformando progresivamente en 15 y 30 sacos en años sucesivos a medida que el préstamo no es pagado. Se asiste además al intento de que el deudor pague con 10 (20 y 30) deben de cobre sin que el acreedor esté de acuerdo. Ello debía obligar en la práctica a diversos cálculos aritméticos relativamente sencillos donde interviniese la suma (de lo adeudado más las sanciones) y la resta (lo adeudado menos los precios de las mercancías recibidas en pago).

Así, el ostraca 69 de Deir el Medineh[27] cuenta el caso de un asno que es prestado a un cortador de madera para su servicio por una cantidad diaria (1/4 saco = 1 oipe), de manera que al cabo de 15 días la deuda asciende a 1 3/4 sacos. Este balance final permite adivinar la posibilidad de que durante los primeros ocho días el préstamo fuera gratuito para transformarse en alquiler al cabo de ese tiempo. El autor del ostraca comunica con brevedad al final que se ha recibido un saco, restando 3/4 de saco.

De esta forma, numerosas transacciones e intercambios de mercancías que se han mostrado a través de los ejemplos precedentes permiten entrever las operaciones aritméticas elementales de suma y resta que debían ser realizadas por los antiguos egipcios. Sin embargo, el últimos caso de préstamo de un asno aborda la generalización de la operación de suma por cuanto el alquiler diario (1/4 de saco) debe repetirse siete veces para obtener la cantidad final adeudada (1 3/4 sacos) en lo que viene a ser claramente una operación de multiplicación con fracciones. A esta nueva operación aritmética (con exclusión por ahora del empleo de fracciones) le dedicaremos el próximo capítulo dentro de un contexto económico y social bien distinto: El cálculo de la superficie de los campos de cultivo.

Notas

1 Maspero, G. (2000): "Cuentos del Antiguo Egipto", pp. 45-46.
2 Kemp, B.J. (1996): "El antiguo Egipto. Anatomía de una civilización".
3 Fernández, L. (1993): "La propiedad inmueble y el registro de la propiedad en las sociedades antiguas. El Egipto faraónico", p. 126.
4 Janssen, J. (1975): "Commodity prices from the Ramessid period".
5 Gardiner, A.H. (1935): "A lawsuit arising from the purchase of two slaves".
6 Ibid, pp. 141-142.
7 Warburton, D. (1997): "State and economy in ancient Egypt", p. 201.
8 Peet, T.E. (1923): "The Rhind mathematical papyrus".
9 Gillain, O. (1927): "La science égyptienne. L'aritméthique au Moyen empire".
10 Maza, C. (1991): "Enseñanza de la suma y la resta".
11 Gillings, R.J. (1972): "Mathematics in the time of faraons".
12 Ibid, p. 13.
13 Bierbrier, M. (1986): "Les bâtisseurs de pharaon. La confrerie de Deir-el-Médineh".
14 Janssen, J. (1975). Op.cit.
15 Ibid, p. 148.
16 Ibid, p. 128.
17 Ibid, p. 123.
18 Ibid, p. 123.
19 Ibid, p. 124.
20 Ibid, p. 124.
21 Ibid, pp. 217-218.
22 Ibid, pp. 525-527.
23 Serrano, J.M. (1993): "Textos para la historia antigua de Egipto", p. 88.
24 Lara, F. (1991): "El Egipto faraónico", pp. 86-87.
25 Menu, B. (1982): "Recherches sur l'histoire juridique, economique et sociale de l'Ancienne Egypte", pp. 239-240.
26 Ibid, pp. 241-242.
27 Ibid, p. 260.

Capítulo 6
Superficie de campos y fiscalidad

Necesidad de la agrimensura

En el primer capítulo pudimos observar y valorar la importancia de la crecida del río Nilo como factor esencial en la vida agrícola del antiguo Egipto. Gracias a este fenómeno era posible la producción de los campos junto al cauce y aún más allá en caso de extender su influencia mediante la canalización adecuada y el establecimiento de diques de contención y acumulación de agua en su retirada al cauce original.

La estación de la inundación cubría de agua las tierras aledañas al río, sus límites desaparecían transformándose en una masa de barro que destrozaba las estelas de piedra erigidas por los servicios catastrales o los particulares. Una crecida más importante de lo habitual no sólo se llevaba por delante los mojones limitadores sino que arrastraba tierras de cultivo de las orillas depositándolas en otros lugares río arriba, transformando con ello la fisonomía de las tierras ribereñas. Las islas que emergían habitualmente por encima de la inundación podían disminuir de tamaño hasta desaparecer o, por el contrario, llegar a constituirse donde antes no existía isla alguna.

Por otro lado, la carestía de agua provocada por una inundación insuficiente podía ser igualmente grave. Uno de los casos más extremos sucedido aproximadamente en el año 1877, durante el Imperio Medio, sólo registraba en los nilómetros una altura dos metros menor de la inundación habitual, pero provocó lo que se calcula como una sequía dramática dejando más de la tercera parte del valle del Nilo sin la irrigación acostumbrada[1]. Incluso la velocidad de retirada de las aguas tenía unas serias consecuencias en el estado del suelo: Si era rápida el suelo no tenía tanto tiempo para absorber las sales minerales que le debían enriquecer y el suelo terminaba entonces empobrecido, pero si la velocidad era lenta y la tierra estaba demasiado tiempo bajo el agua perdía también algunas de sus cualidades de aireación, imprescindibles para desalinizar el suelo.

La inundación, por tanto, podía cambiar las siguientes características de los campos de cultivo:

- Su propia existencia, por cuanto la tierra podía ser arrastrada por las aguas río arriba hacia su desembocadura en el Delta del Nilo. Asimismo, por depósito de tierras arrastradas previamente nuevas extensiones cultivables podían surgir, particularmente entre las tierras junto a la ribera.

- Su extensión, dado que los límites solían desaparecer o aparecer en sitios distintos de los originales.

- El estado del suelo, sea porque la inundación no alcanzara a cubrirlo o su velocidad de retirada no fuera la adecuada, en cuyo caso dicho suelo terminaba empobreciéndose. A ello habría que añadir la posible destrucción u obstrucción de los diques que mejoraban los terrenos más alejados de la orilla, lo que podía provocar de nuevo el empobrecimiento, esta vez respecto de las tierras alejadas del cauce.

Todas estas circunstancias permitirán comprender mejor lo imprescindible de la agrimensura, es decir, de la medida de la tierra al objeto de comprobar regularmente la extensión de los campos originales, volver a fijar sus límites y determinar si se había conservado la naturaleza de su suelo, factor esencial para poder fijar su producción previsible.

Naturaleza y estado de la tierra

Se comentaba en el primer capítulo las diferencias existentes entre el Alto Egipto, con una franja más o menos amplia de terreno cultivable a ambos márgenes del río, y el Bajo Egipto, las tierras del Delta donde el río se bifurcaba en muchos brazos de agua que inundaban muchas extensiones de tierra. Sin embargo, no se tienen muchos datos respecto de la clasificación de las tierras que hacían los propios egipcios. Hay que tener en cuenta que, aunque las tierras aparentemente son las mismas que actualmente, ello no es enteramente cierto. Las canalizaciones de la época modificaban sustancialmente la naturaleza de los campos debido a su irrigación, la transformación que hizo Amenemes III del oasis de El Fayum proporcionó un aumento de las tierras cultivables, así como las obras de drenaje sobre el Delta efectuadas en los tiempos ramésidas, cuando la capital se trasladó a Pi-Rameses, sobre estas tierras.

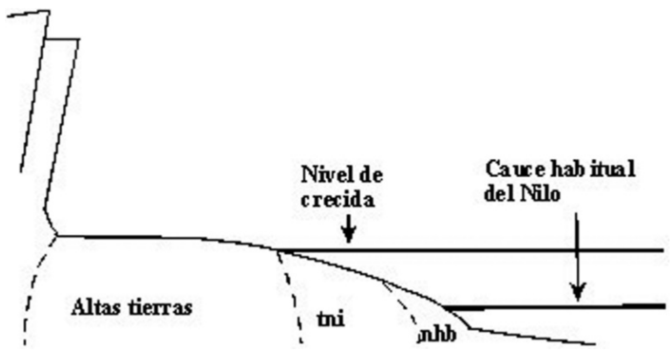
Los documentos más importantes que han sobrevivido sobre estas cuestiones son papiros administrativos del período ramésida. Son de naturaleza fiscal por cuanto registran los campos pertenecientes a un determinado dominio funerario, tierras del faraón, dependientes de un templo o las administradas por soldados, sacerdotes o escribas en donación. El enorme papiro Wilbour, más de diez metros cubiertos de unas 5200 líneas de datos de este tipo, abarca poco más del 4 % de la tierra cultivable en aquel período de la historia egipcia[2] correspondiendo a posesiones de templos funerarios dedicados a Amon sobre todo en Heliópolis y Menfis. Otros papiros menores en tamaño pero también importantes son los del Louvre AF 6345 (junto a los fragmentos Griffith), los de Prachov, Reinhardt y Grundbuch, pertenecientes todos ellos a un período de tiempo que puede situarse al final del reinado de Ramsés XI o el principio del Tercer Período Intermedio, y tratando de tierras asociadas en general a templos de la zona tebana como el templo de Khonsu en Karnak[3].

A partir de los datos registrados en estos papiros y, en particular, de la producción asociada (que indica la fertilidad de los campos) así como de distintas denominaciones que se añaden en algunos de estos documentos se puede deducir, *grosso modo*, la existencia de al menos tres categorías de terrenos que se refieren a la naturaleza y estado de su suelo:

- Altas tierras (*k3yt*), de una productividad media (en torno a los cinco sacos por arura, según el papiro Wilbour), son terrenos que en un número crecido se extienden desde el extremo más alejado de la inundación hasta el borde de los acantilados que bordean el cauce del río en el X nomo al que se refiere el papiro Louvre AF 6345. Es, por tanto, una tierra que no suele inundarse por lo que, en condiciones normales de crecida, debe irrigarse artificialmente mediante los canales construidos al efecto.

- Las tierras ribereñas (*nhb*) forman una banda de terreno junto al cauce del río que se beneficia sistemáticamente de cualquier forma de inundación. Son terrenos que se han formado en muchos casos por aluvión y de una importante fertilidad (con una productividad aproximada de 10 sacos por arura según el Wilbour).

- Entre las dos anteriores parece que debe contemplarse otra franja de terreno cultivable (tierras *tni*), cuya productividad según el papiro Wilbour se encontraría también entre la adjudicada a las anteriores dado que serían inundables en condiciones habituales pero serían las primeras en perder la presencia del agua en la retirada del río a su cauce.



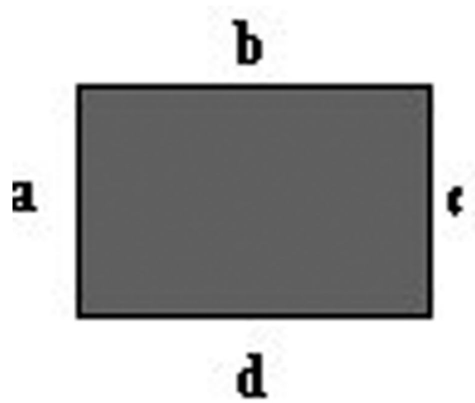
Todos estos registros eran llevados a cabo dentro de un programa de catastro que se renovaba con periodicidad, quizá incluso anualmente. Eran de responsabilidad de la administración central que, en su momento, también se encargaba del transporte de la parte de producción correspondiente a las tasas fiscales hasta los grandes graneros de Amón en las capitales de los nomos, dependientes en última instancia del visir y del Director del Doble Granero. En ciertas ocasiones es muy posible que hayan sido funcionarios locales (el llamado consejo del catastro) los encargados del registro y medida de las tierras, delimitación de las mismas y cálculo de la producción esperable pero, en todo caso, la responsabilidad última era de la administración central[4], al menos en los períodos de fuerte gobierno centralizado.

El responsable más directo de las operaciones en el ámbito local era el jefe de la tasación, labor encomendada en los papiros conocidos al gran sacerdote de Amón en persona[5] que, a través de un amplio grupo de escribas (probablemente con sus jerarquías) extendía la cuerda con nudos que les servía para efectuar la medida de las longitudes y realizaba los cálculos oportunos para determinar la superficie de los campos y su productividad empezando por su forma.

Forma y extensión de los campos

El escriba autor del papiro Reinhardt[6] incluyó en determinadas ocasiones una serie de datos numéricos que denotan las dimensiones de los campos medidos. Así, los números presentados como

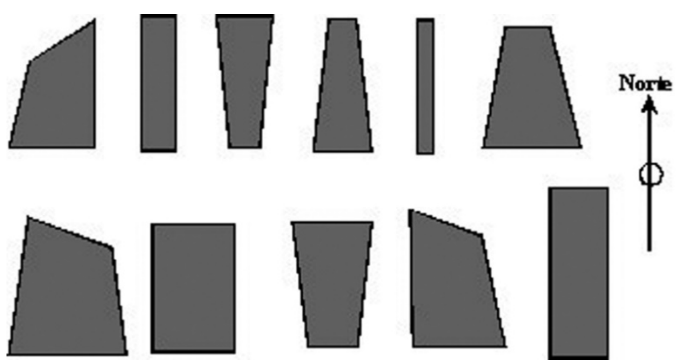
parecen corresponder a un campo de cuatro lados cuyas dimensiones vienen marcados por



Que estos datos deben referirse a las dimensiones de los campos cuadriláteros se ha deducido a partir de su comparación con las extensiones finales de la superficie de los mismos. Para dicho cálculo ha debido emplearse una fórmula conocida desde la antigüedad consistente en multiplicar la semisuma de los lados opuestos, es decir,

Es evidente que si los lados opuestos son de la misma longitud (como pasa en el rectángulo de la figura), bastará poner una sola vez el número correspondiente a la medida de uno de esos lados.

Pues bien, con los escasos datos encontrados en este papiro se puede determinar la forma más usual de los campos registrados que suele oscilar entre el rectángulo y el trapecio (rectangular en uno de los casos) con alguna presencia de trapezoides, todos ellos alineados paralelamente al borde del río.



Otros casos se han registrado de campos aproximadamente rectangulares cuyo lado más corto coincidía con el curso de un canal, de manera que el riego estuviera garantizado con facilidad y las aguas del canal pudieran alcanzar al mayor número posible de campos distintos. En suma, la forma de los campos encontrados en el papiro Reinhardt parecen ser unos buenos ejemplos de las más habituales dentro de la agricultura egipcia.

En cuanto a la extensión de los campos registrados, se encuentra en el papiro Wilbour que las superficies de los terrenos correspondientes a dominios normales oscilan entre 5, 10 y 20 aruras mientras que los dominios más repartidos por corresponder a donaciones a particulares son considerablemente más pequeños (entre 1/4 y 1 arura). Este último es el caso más frecuente del papiro Louvre mientras que en los restantes la superficie más habitual se mueve entre una y tres aruras lo que parece, en general, una extensión pequeña para garantizar el sustento de una familia entera.

Una particularidad de difícil interpretación en las medidas de superficies registradas por los escribas es que se presentan en muchas ocasiones una sucesión de números decrecientes, el primero de los cuales parece corresponder a la superficie real de la tierra.

"II.27 ... del escriba ... hijo de [..]emheb, aruras: 5 : **2**, sin agua, el escriba...
IV.4 .... ½ : **1/4**
IV.5 .... Hor[em]at, 1/4 : **1/8**
VI.16 El escriba de la armada Nespanebetouret hijo de Baketmout, aruras 3: ½
VI.17 El carrero Nespakafayâ hijo de ar: 3 : 2
VI.19 El carrero Patout hijo de Horemhatmechâf, aruras: **2** : **1** : ½ : **1/4 1/8**"[7].

Pese a lo ilegible de algunos trozos de la parte posterior del papiro (el llamado 'verso' del mismo) se encuentran estos números en disminución que pueden corresponder a reducciones fiscales cuyo motivo debe ser variado: La naturaleza del suelo, el tipo de cultivo (que no suele registrarse en los papiros administrativos), la característica que a veces se acompaña de tierra 'sin agua' o 'en seco' que no se conoce bien a qué corresponde e incluso características personales (un solo agricultor, varios miembros familiares, por ejemplo) serían posiblemente factores que influyen en las disminuciones fiscales realizadas. Esta hipótesis sería coherente con los datos encontrados. En efecto, la disminución no corresponde a un patrón uniforme ya que puede transformar una superficie en la mitad (de ½ a 1/4, por ejemplo) pero también conoce reducciones muy drásticas (de 3 a ½ en VI.16). En otras ocasiones no registradas en las líneas antes seleccionadas la reducción parece más un redondeo que otra cosa (pasar por ejemplo de 35 ½ a 35 aruras) pero no se redondea igual los campos pequeños que los grandes.

Otro dato que redunda en la hipótesis de las reducciones fiscales es el hecho de que algunas líneas (como la VI.19) muestran varias reducciones progresivas (a la mitad las dos primeras y a los 3/4 la última) que serían coherentes con la aplicación sucesiva de varios criterios distintos.

La producción de los campos

En el papiro Louvre, junto a los datos correspondientes a la superficie de los campos, se añade el número de sacos de producción que generan estos campos. Por ejemplo, al registrar el dominio de Ramsés-Méryamon-Merout se hace una relación de parcelas con su extensión para concluir la columna con

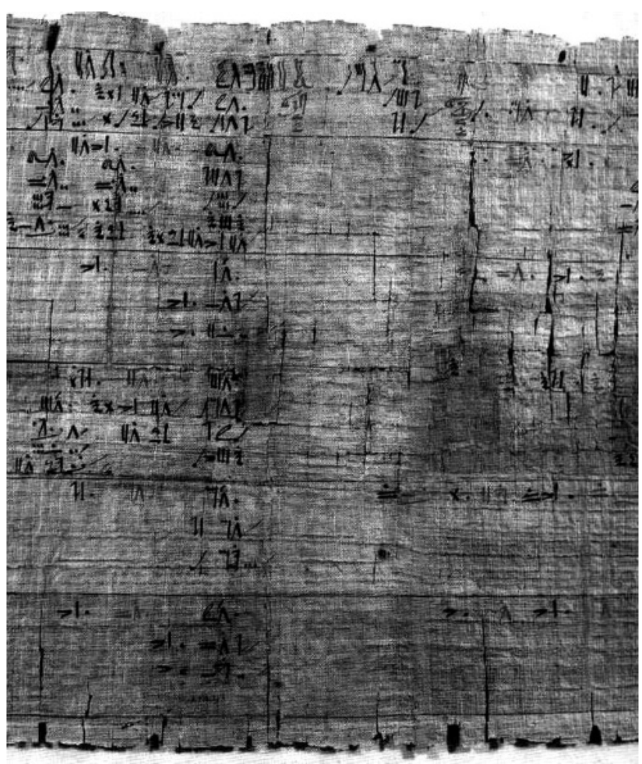
> "Total de tierras ribereñas en cultivo, [aruras: 87] ½ 1/4 , que hace en sacos: **175 2/4.**
> [Todas] las altas tierras, [aruras: 162 ½], que hace en sacos 32 2/4 **130**.
> Total en sacos: 32 2/4 [**305**] **2/4**. Parte del templo de Amon, en sacos: **20**; que hace en sacos: 32 2/4 **285 2/4** ..."[8].

Se ha marcado en negrilla lo que aparece en tinta roja en el papiro (en contraste con la negra empleada en el resto) que corresponde a la distinción hecha por el escriba en el total de sacos entre dos tipos distintos de cereal. Sin entrar en tales distinciones en este papiro la producción es de dos sacos por arura en las tierras ribereñas mientras que sólo llega a un saco por arura en las tierras altas. Ello contrasta notablemente con la producción registrada en el papiro Reinhardt que, al igual que el Wilbour, adjudica diez y cinco sacos por arura, respectivamente, a estos dos tipos de tierras.

En todo caso, estos registros de superficies de campos y los sacos de producción daban lugar a repetidas sumas (los subtotales y totales de cada dominio son frecuentes) así como a multiplicaciones (para el cálculo de sacos o el de las superficies de los campos) y posiblemente a operaciones entre fracciones de cuantificación imprecisa (para la reducción fiscal de la extensión de los campos) aunque también podrían haberse realizado mediante simples sutracciones en algunos casos. Ello conduce a tratar en detalle la forma que adoptaba la multiplicación a partir del examen de los problemas sobre cálculo de superficies conservados en los papiros matemáticos más conocidos.

Los papiros Rhind y Moscú

En 1858 un inglés, Henry Rhind, que estaba viajando por Egipto por problemas de salud, adquirió en Luxor un conjunto de papiros entre los que se encontraba el que luego sería célebre papiro Rhind de matemáticas. Le dijeron entonces que había sido descubierto en una modesta estancia cercana al Rameseum, una estancia que sería visitada posteriormente (hacia 1862) por el norteamericano Edwin Smith con el feliz resultado de encontrar algunos trozos más de aquel papiro junto a otros documentos como el papiro médico Smith o el también matemático rollo de cuero[9]. Esa habitación, probablemente de un escriba, había estado alejada de las inundaciones periódicas, una feliz casualidad que ha preservado hasta nuestros días unos materiales tan perecederos frente al agua.



Papiro Rhind

El papiro Rhind está compuesto por cuarenta hojas que totalizan los más de cinco metros de longitud que presenta. A la muerte de Rhind fue vendido por su albacea en 1865 al British Museum[10] conservándose el trozo restante en el museo de Brooklyn. Su primera publicación completa en el original hierático tuvo que esperar a 1877 (Eisenlhor) siguiéndole otra edición facsimilar en 1898 (British Museum). Desde entonces se han sucedido distintos estudios y nuevas ediciones entre las que las más importantes resultaron la de Peet (1923)[11] y la de Chace (1927), basándose en esta última la edición de Clagett (1999)[12], aquí utilizada como fuente de los textos comentados.

El papiro comienza enunciando las intenciones de su autor y situándolo cronológicamente:

> "Razonamiento exacto para averiguar las cosas, y el conocimiento de todas las cosas, misterios... todos los secretos. Este libro está escrito en el año real 33, mes 4 de Akhet, [bajo la Majestad del] Rey del [Alto y] Bajo Egipto, Awserre, Vida dada, a partir de una copia antigua hecha en el año del Rey del Alto [y Bajo] Egipto, [Nym]atre. El escriba Ahmose escribe esta copia".

Según los estudiosos, la copia se realizó durante el Segundo Período Intermedio y bajo el reinado de Apofis I (1585 - 1542), el primer rey hicso que adoptó un nombre completamente egipcio y que estableció unas relaciones cordiales con los reyes de la dinastía tebana, dominadores del Alto Egipto[13]. Las circunstancias por las cuales el papiro redactado por el escriba Ahmose llegó hasta la zona tebana son desconocidas pero es previsible que se los llevase algún escriba desde la capital hicsa Avaris tras la ocupación tebana de esta ciudad. En todo caso, sí es interesante resaltar para situar cronológicamente los conocimientos que ahí se exponen que Ahmose se refiere a su calidad de copista de un manuscrito que se dataría en el reinado de Amenemes III (1844 - 1797), casi tres siglos antes, durante el Imperio Medio.

El segundo documento en importancia para el conocimiento de las antiguas matemáticas egipcias es el llamado papiro de Moscú, actualmente depositado en el Museo de Bellas Artes de esta ciudad rusa. Formaba parte de la colección Golenishchev, viajero que lo había recibido por una módica suma hacia 1893 de un miembro de la familia Abd el Rassoul, los detentadores del secreto finalmente descubierto sobre las tumbas reales en Deir el Bahari, un depósito extraordinario de momias reales. Papiro de considerable longitud en su origen (más de cinco metros) pero muy estrecho, se ha datado en la dinastía XIII pero, al igual que el Rhind, es probablemente una copia de un papiro original del Imperio Medio. La edición más completa hasta la fecha, la de W.W. Struve en 1930, ha servido de base para la edición de Clagett[14], fundamento de la exposición presente en estas páginas.

Multiplicación y división de números naturales

La realización de los problemas de cálculo de superficies en estos papiros precisan conocer previamente cómo realizaban la multiplicación y división de números naturales.

La primera operación puede dar lugar a varios tipos de problemas[15] que serán analizados por medio de diversos ejemplos:

Razón

> Tengo 5 aruras de tierra que producen 2 sacos por arura. ¿Cuántos sacos ha producido la tierra en total?

Comparación

> Un campo cuadrado tiene 2 khet de lado y otro del mismo tipo tiene un lado 4 veces mayor que el primero. ¿Cuál es la longitud del lado correspondiente al segundo campo?

Los dos problemas presentados se resuelven por medio de la multiplicación pero los términos verbales que definen las relaciones entre cantidades son distintas: En el problema de razón se habla de una cantidad concreta (5 aruras) y otra que expresa la relación entre dos cantidades (2 sacos/arura), mientras que en el de comparación se vuelve a encontrar una cantidad concreta (2 khet) y otra marcada por la relación entre dos (la longitud mayor es 4 veces la menor) aunque los términos lingüísticos son claramente diferentes. Ambos tipos de problemas multiplicativos se encuentran expresados en el papiro Rhind cuando se tratan problemas de superficies de campos.

Existe, sin embargo, un tercer tipo de problema resoluble por la multiplicación y de naturaleza bien diferente en cuanto a sus cantidades:

Combinación

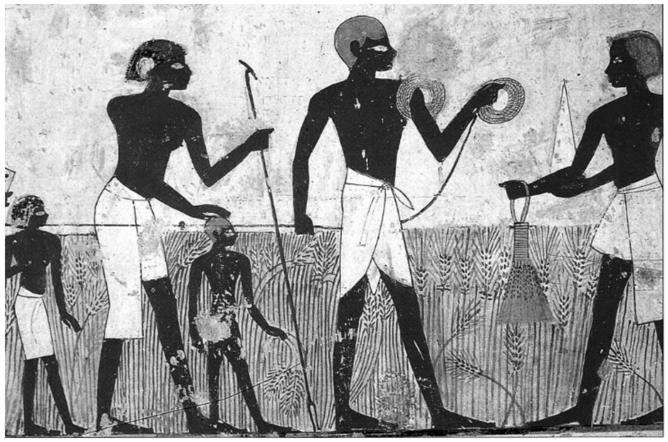
> Un campo rectangular tiene 2 khet de largo por 3 khet de ancho. ¿Cuál es la superficie de este campo?

En esta ocasión las dos cantidades presentes en el problema son del mismo tipo, son discretas y no se refieren a la 'intensidad' con que una cantidad está en relación con otra, como pasaba en los problemas anteriores. Tiene además otra peculiaridad: En los problemas anteriores (razón y comparación) la cantidad resultante era del mismo tipo que una de las cantidades presentes en la relación original:

5 aruras x 2 sacos/arura = 10 sacos
2 khet x 4 veces = 8 khet

mientras que en el de combinación se combinan dos cantidades (2 khet, 3 khet) de la magnitud longitud para dar lugar a una cantidad que no es expresable en khet sino que corresponde a una magnitud diferente (superficie) expresable con otras unidades (6 setat o aruras). Este tercer tipo de problema multiplicativo, como veremos en el siguiente epígrafe, también está presente en numerosos problemas y, en concreto, en los que atañen al cálculo de superficies.

Pues bien, el modo operativo que adopta el egipcio para realizar multiplicaciones está asociado habitualmente a los dos primeros tipos de problemas y ello lo realiza aunque el problema planteado sea del tercer tipo. En efecto, la distinción entre los tres tipos de problemas no es caprichosa sino que obedece, en la enseñanza de las Matemáticas, a problemas que han demostrado tener unas exigencias y dificultad distintas en el aprendizaje infantil[16] (resultan más fáciles los de razón y más difíciles los de combinación). Además, las estrategias que los resuelven son distintas ya que los dos primeros son susceptibles de abordarse mediante la suma reiterada mientras que el tercero no, puesto que la reiteración de khet no nos puede dar nunca setat.



El hecho de que los problemas de combinación sean resueltos por los egipcios mediante la suma reiterada, como veremos enseguida, demuestra que el nivel de abstracción alcanzado por la matemática egipcia era suficientemente alto como para considerar exclusivamente las relaciones numéricas con independencia de la naturaleza de las cantidades en juego.

Pues bien, tenían una elegante y muy eficaz manera de aplicar la suma reiterada a los problemas de multiplicación que eludía la necesidad de memorización alguna de resultados parciales. Así, si 2 khet tengo que repetirlos 4 veces el resultado puede obtenerse sin más que doblar la cantidad de 2 khet (hasta 4 khet) y volver a doblar este último resultado (hasta 8 khet) adoptando la siguiente disposición:

Veces	Cantidad
1	2
2	4
4	**8**

Este procedimiento tiene que modificarse cuando se debe multiplicar por un número impar. De esta forma, si 2 sacos/arura tengo que repetirlos 5 veces, tantas como aruras existentes, la disposición sería:

Veces	Cantidad	
1	**2**	✓
2	4	
4	**8**	✓

5	**10**	

Mediante este método de 'duplicación' sucesiva se puede combinar los 'números de veces' al objeto de que resulte finalmente el número de veces deseado, corresponda a un número par o a otro impar. De esta manera, 5 veces la cantidad de 2 sacos es igual a 4 veces más una vez los dos sacos. Se está utilizando entonces de manera implícita la propiedad de que todo número entero es expresable como una combinación de potencias de dos (considerando que $2^0 = 1$).

Que el procedimiento del escriba egipcio es meramente empírico lo denota el hecho de que sólo en raras ocasiones llega a emplear un número de veces que no corresponde a un múltiplo de dos, con el objetivo de abreviar el procedimiento. Así, cuando se desea multiplicar 18 por 12 se podría considerar la repetición tres veces del número 18:

Veces	Cantidad
1	18
3	54
6	108
12	**216**

e incluso la repetición diez veces del número 18 por un método que fue adjetivado de sencillo en el capítulo 4: La multiplicación por diez sustituyendo los símbolos numéricos jeroglíficos.

Veces	Cantidad	
1	18	
2	**36**	✓
10	**180**	✓
12	**216**	

realizándose generalmente, sin embargo, mediante duplicaciones sucesivas:

1	18	
2	36	
4	**72**	✓
8	**144**	✓
12	**216**	

Aunque el campo de problemas de división en la matemática egipcia es muy amplia, particularmente al abordar el reparto de raciones que serán materia de estudio en un capítulo posterior, es necesario presentarlo ahora por dos motivos: En primer lugar, por aparecer esporádicamente en problemas de cálculo de superficies (al hallar el inverso de un número, por ejemplo) y, en segundo lugar, porque su cercanía operativa con la multiplicación es considerable. En efecto, la división se resuelve como una multiplicación donde la incógnita se refiere a uno de los factores antes que al resultado final.

Así, planteada la división 112 : 7 se puede interpretar como

$$7 \times \square = 112$$

de manera que se resuelva como la multiplicación de 7 por un factor desconocido o, en otras palabras, la repetición de 7 un número indeterminado de veces hasta alcanzar 112:

Veces	Cantidad
1	7
2	14
4	28
8	56
16	**112**

de manera que $7 \times 16 = 112$

Cuando el resultado no es inmediato, como en el caso planteado, había que buscar una combinación adecuada en la columna derecha (en el número de veces) hasta encontrar que la combinación correspondiente en la columna derecha (cantidad) resultaba en el resultado de la multiplicación (el dividendo).

En el caso de dividir 234 : 6 se dispondrían todos los resultados parciales hasta que el número de veces excediera al dividendo (234):

Veces	Cantidad	
1	**6**	✓
2	**12**	✓
4	**24**	✓
8	48	
16	96	
32	**192**	✓
39	**234**	

De este modo se calcularía la combinación mínima de números en la columna derecha que resultara en el dividendo. El factor que multiplicado a 6 resultaría en 234 se obtendría entonces sin más que sumar el número de veces correspondiente en la columna de la izquierda.

Aunque en algunos ejemplos que tratemos en este capítulo se presentarán fracciones unitarias el procedimiento para su multiplicación y división es básicamente el mismo que el expuesto aunque, naturalmente, la presencia de fracciones introduzca una dificultad mayor.

El área del rectángulo

El problema más elemental de cálculo de la superficie de un rectángulo, forma básica de los campos egipcios, es el siguiente:

“**Rhind - Problema 49**: Ejemplo de cálculo de área. Si te dicen: ‘¿Cuál es el área de un rectángulo de tierra de 10 khet por 2 [debe ser 1] khet?’”.

Examinando los cálculos subsiguientes sólo se puede concluir en la existencia de un error en el copista Ahmose, ya que todo el cálculo se hace correctamente sobre un rectángulo de 10 khet por 1 khet, mientras que el número de 2 khet no aparece en ningún momento. A partir de esta corrección, el procedimiento de cálculo se apoya en una transformación de todos los datos numéricos a codos (1 khet = 100 codos):

1	1.000
10	10.000
100	100.000
1/10	10.000
1/10 de 1/10	1.000

Así, en la primera línea se expresan 10 khet de largo como 1.000 codos que, en las dos siguientes líneas, se multiplican por 100 codos (1 khet de ancho) dando un resultado (100.000 codos cuadrados). Con el cálculo de su centésima parte (1/10 de 1/10) el escriba transforma este resultado (100.000 codos cuadrados = 10 setat) en 1.000 ‘codos de tierra’ (recuérdese que, según el capítulo 4, 1 setat = 100 codos de tierra).

Independientemente de las sucesivas transformaciones entre unidades a que le obliga el deseo de calcular sobre codos antes que utilizando khet y setat directamente (preferencia no siempre presente en los problemas de este papiro), es evidente que la superficie de un rectángulo era calculada correctamente por multiplicación de sus dos dimensiones.

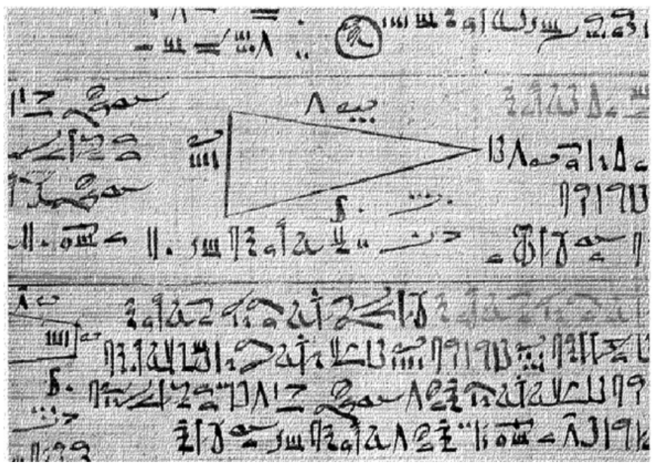
Ello supone la elección como unidad de superficie del codo cuadrado en este caso, del setat en otros problemas, y la comprensión de la multiplicación combinatoria: Multiplicando los codos del largo por los del ancho se obtiene el total de cuadrados de un codo cuadrado en que es posible descomponer el rectángulo.

El área del triángulo

Se ha observado en las formas de los campos del antiguo Egipto que éstas no se reducían a rectángulos sino que aparecían también trapecios y trapezoides, en algunos casos descomponibles en rectángulos y triángulos. En este sentido la figura triangular es básica. El rectángulo también puede descomponerse en dos triángulos lo que está en la línea del método de triangulación de un terreno utilizado actualmente por los topógrafos. Para el egipcio, sin embargo, la figura más básica no lo era por su capacidad de formar geométricamente otras figuras, como es el caso del triángulo, sino por ser más sencilla para el cálculo de su superficie (y, en este caso, es el cuadrado o el rectángulo). Este planteamiento previo tiene una gran importancia para justificar muchos de los pasos dados por el escriba egipcio en el cálculo de superficies: En la mayoría de estos casos este cálculo consiste en transformar la figura tratada en un rectángulo de área equivalente.

La superficie de un triángulo es hallada con sencillez en

“**Rhind - Problema 51**: Ejemplo de producir [el área de] un triángulo de tierra. Si te dicen: ‘¿Cuál es el área de un triángulo de 10 khet de *mryt* [altura] y 4 khet de base?’”.



Problema Rhind 51

La resolución consiste en tomar la mitad de la base (4 khet = 400 codos) “para hallar su rectángulo” dice explícitamente el papiro.

1	400	[4 khet]
½	200	[2 khet]

de manera que ahora se multiplica el resultado (2 khet) por la altura (10 khet = 1.000 codos):

1	1.000	[10 khet]
2	2.000	

obteniéndose el resultado de 2.000 ‘codos de tierra’ o 20 setat, que es la respuesta final dada por el escriba.

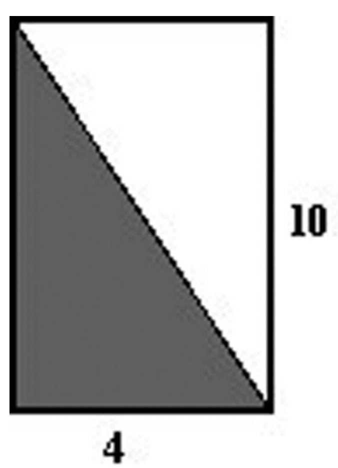
Este procedimiento coincide en sus distintos pasos con la aplicación actual de la conocida fórmula de la superficie de un triángulo como el semiproducto de la base por la altura. Pero diversas cuestiones surgen a raíz de la propia formulación de este problema.

La figura que acompaña al texto del problema presenta un triángulo aproximadamente rectángulo con la medida de la base y la altura junto a dos de sus lados (4 y 10). El término para denominar su altura (*mryt*) significa ‘orilla’ o ‘borde’ de una extensión de agua[17] lo que podría referirse a un lado antes que a una altura. Por otro lado, en la figura la altura aparece fuera del triángulo, junto a un lado, cuando las alturas en los triángulos no escalenos siempre son interiores al mismo.

Todo ello ha acarreado diversas especulaciones y dudas sobre si el término *mryt* designaba a un lado del triángulo (en cuyo caso, los cálculos del escriba en otro tipo de triángulos serían erróneos y la forma de cálculo no generalizable) o bien a la altura. En favor de la última hipótesis se ha argumentado que las longitudes en las figuras eran siempre escritas fuera de las mismas reservando su interior para escribir la medida de sus superficies, lo que justificaría escribir la altura de un triángulo, aunque se refiera a un segmento interior, fuera del triángulo. Además, frente a los que se refieren al término *mryt* como 'borde' de un campo y, por tanto, denominando un lado (un borde exterior) Struve[18] hace notar que la auténtica palabra para designar la altura (*k3w*) sólo se emplea en el cálculo de volúmenes (en concreto en Rhind - 43, 44) por cuanto en un granero cilíndrico la altura tiene un sentido físico mientras que no lo tiene en una superficie plana, por lo que el escriba se inclinaba a expresar lo que para nosotros es también una altura con otro término distinto.

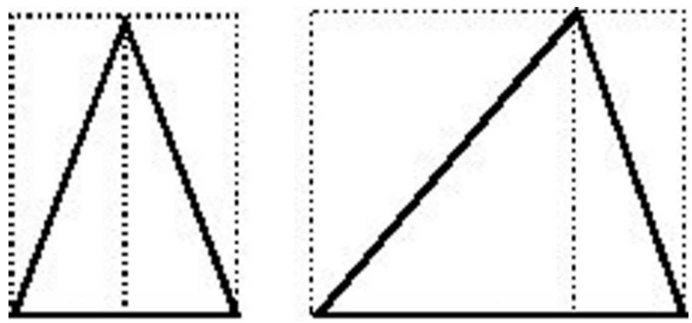
Hay cierto acuerdo entre los estudiosos del tema sobre el hecho de que *mryt* se refiere a lo que actualmente denominamos altura de un triángulo. Si no fuera así, el cálculo de su superficie sería erróneo en no pocos casos y, dada la destreza alcanzada por los antiguos egipcios en otros cálculos de superficies (como es el caso del trapezoide), resultaría extraño el error en figuras más sencillas. Un dato, sin embargo, resulta de importancia señalar: Los casos de cálculo de superficie de un triángulo en el papiro Rhind no son frecuentes ya que debía ser un procedimiento sencillo. El único caso es el señalado y la figura que se adjunta es un triángulo aproximadamente rectángulo donde coincide la altura con uno de sus lados por lo que resulta lógico escribir la longitud de la altura junto al lado correspondiente.

La elección de un triángulo rectángulo no es caprichosa, sino que obedece a un deseo de sencillez y claridad en la exposición del procedimiento de cálculo de la superficie. No se puede olvidar que el papiro Rhind es un documento efectuado por un copista muy probablemente para la enseñanza de aprendices de escriba. El texto está salpicado de fórmulas del estilo de 'Haz el mismo procedimiento cuando tengas un caso análogo' lo que revela este objetivo. Ahora bien, si se desea enseñar el procedimiento de cálculo de una superficie triangular el enseñante escoge el caso de triángulo más sencillo que resulta ser el de la descomposición de un rectángulo en dos triángulos iguales, es decir, cuando surgen dos triángulos rectángulos.



A partir de este origen es posible entender mejor el método de cálculo mostrado en el problema. Es evidente geométricamente que la superficie del triángulo se puede hallar dividiendo por la mitad el rectángulo que es posible formar con las mismas dimensiones dadas para el triángulo rectángulo. La expresión “hallar su rectángulo” es suficientemente reveladora a este respecto.

¿El procedimiento era generalizable a otros triángulos? Parece fuera de duda si, como luego se comprobará, un trapecio se llegaba a transformar en un rectángulo de área equivalente, que es un problema más complejo. Pero si es generalizable también lo sería la formación de un rectángulo de área doble que la de cualquier triángulo de que se partiese.



Otros problemas de rectángulos y triángulos

En el papiro de Moscú aparecen tres problemas más relacionados con el cálculo de superficies de estas figuras con la particularidad de que los datos conocidos son ahora el área y la relación proporcional entre las dos dimensiones de la figura. Ello da lugar a un nuevo procedimiento de gran riqueza y una mayor complejidad matemáticas.

> “**Moscú - Problema 6**: Ejemplo de cálculo de un rectángulo. Si te dicen: ‘Un rectángulo de 12 setat [de área, tiene] una anchura de ½ 1/4 de su longitud. [Calcular sus dimensiones]’”.

El procedimiento seguido discurre a través de los siguientes pasos:

- Calcular con ½ 1/4 hasta 1, es decir, hallar el inverso 1 : ½ 1/4 (en otras palabras, 1 : 3/4), lo que da como resultado 1 1/3.

1	½ 1/4
1/3	1/6 1/12 = 1/4
1 1/3	½ 1/4 1/4 = 1

- Multiplicar el área 12 por 1 1/3, dando finalmente 16.

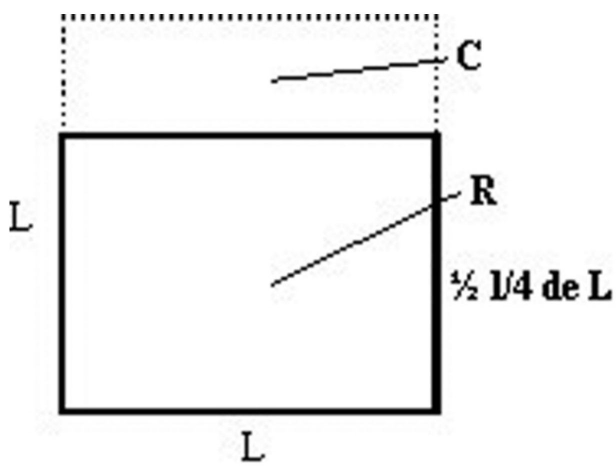
1	12
1/3	4

----
1 1/3   16

- Calcular el ángulo de 16, es decir, su raíz cuadrada, que es 4, la longitud.
- La anchura será ½ 1/4 de 4, que resulta ser 3.

¿Qué objetivos geométricos persigue esta secuencia de operaciones? Debemos olvidar en la medida de lo posible cualquier procedimiento actual (salvo en la medida en que ilumine los más antiguos) por lo que prescindiremos del empleo de variables, logro que las Matemáticas ha tardado varios siglos más en empezar a utilizar (comenzando con la obra de Diofanto, siglo I dC) y bastante más en hacerlo con destreza y asiduidad (siglo XVII). De modo que sólo cabe hacer una interpretación geométrica que se pueda traducir a estas operaciones aritméticas.

A este respecto se puede entender[19] que la realización del escriba empieza por entender que la misma proporción en la que está la longitud con la anchura están las superficies del cuadrado que tenga la longitud por lado respecto del rectángulo del problema.



De esta manera, el escriba hace los siguientes pasos:

- En primer lugar halla el inverso de ½ 1/4 para hallar la relación superior a la unidad entre la Longitud y la Anchura, con la que prefiere trabajar. Encuentra que la Longitud es 1 1/3 de la Anchura.
- Así, al considerar el cuadrado C que tiene por lado la Longitud, su relación con el rectángulo R original del problema será también de 1 1/3, es decir, C es 1 1/3 veces R. Por ello, multiplica el área del rectángulo R (12) por 1 1/3 obteniendo así (16) la superficie del cuadrado C.
- Como este cuadrado tiene por lado la Longitud buscada basta hallar la raíz cuadrada de la superficie 16 (o su ‘ángulo’ en la terminología egipcia) para alcanzar el valor (4) de la Longitud.

En este papiro se muestra a continuación un problema similar referente a un triángulo que, salvo por las peculiaridades de esta figura, se resuelve acudiendo al procedimiento anterior.

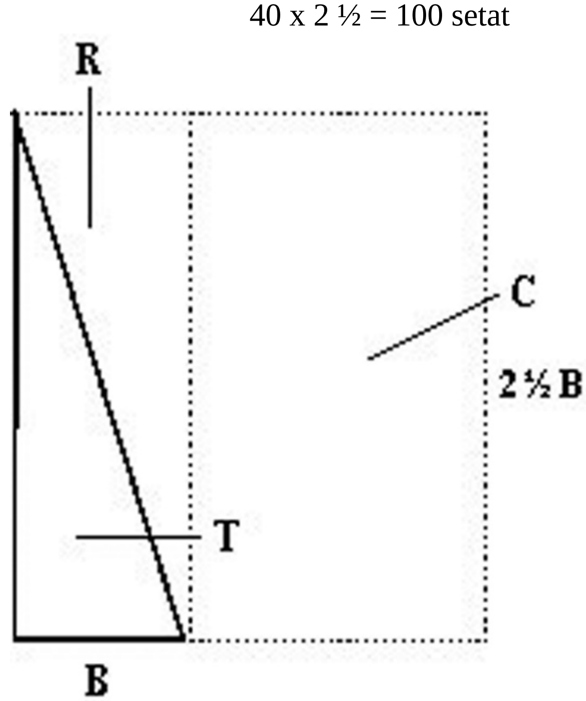
"**Moscú - Problema 7**: Ejemplo de cálculo de un triángulo. Si te dicen: 'Un triángulo con área de 20 [setat] e *idb* de 2 ½ '".

Todo hace indicar que el término *idb* se refiere a la relación entre la altura y la base, a partir de lo cual el método que muestra el escriba empieza por doblar el área del triángulo transformándolo así en el rectángulo cuyas dimensiones están en la misma relación que la existente entre la altura y la base del triángulo.

2 x 20 = 40 setat

El siguiente paso consiste en multiplicar el área del rectángulo R por 2 ½ hallando así la superficie del cuadrado C que es 2 ½ veces mayor que la de dicho rectángulo.

40 x 2 ½ = 100 setat



Se calcula la raíz cuadrada de esta superficie que dará por tanto el lado del cuadrado C.

Raíz (100) = 10

Como lo que nos interesa es hallar la Base del triángulo T que es 2 ½ veces menos la longitud anterior, es preciso operativamente calcular el inverso de 2 ½ :

1	2 ½	
1/3	½ 1/3	✓
1/15	1/10 1/15	✓

1/3 1/15   ½ 1/3 1/10 1/15 = ½ 1/3 1/6 = 1 de modo que 1 : 2 ½ = 1/3 1/15, que es el número por el que hay que multiplicar el lado del cuadrado C al objeto de encontrar la longitud de la base.

10 x 1/3 1/15 = 4 khet (Base)
4 x 2 ½ = 10 khet (Altura).

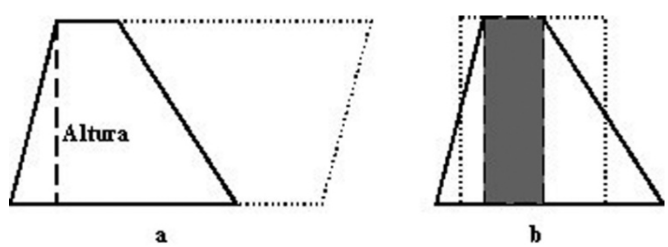
El área del trapecio y el trapezoide

El papiro Rhind plantea el cálculo de la superficie de un trapecio como una aplicación del cálculo sobre triángulos, no sólo porque el problema se presenta inmediatamente a continuación sino porque la denominación egipcia del trapecio es la de 'triángulo truncado'.

> "**Rhind - Problema 52**: Si te dicen: '¿Cuál es el área de un triángulo truncado de tierra de 20 khet en su altura, 6 khet en su base, 4 khet en su línea truncada?'".

La forma de cálculo comienza por añadir las dos bases paralelas:
"Añadir su base a su línea truncada, hace 10.
Tomar ½ de 10, es decir, 5, para [un lado] de su rectángulo.
Multiplicar 20 veces 5, hace 10. Este es el área".

La cuestión clave es el modo en que se transforma el trapecio en el rectángulo de superficie equivalente y que se menciona explícitamente en la resolución. Hay dos posibilidades que dependen de cómo se interprete la semisuma de las dos bases paralelas del trapecio.



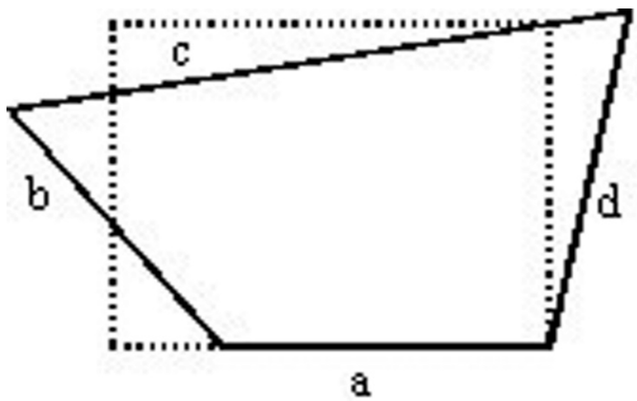
La primera posibilidad consiste en doblar la superficie del trapecio mediante la adición al original de un nuevo trapecio invertido (figura a). Ello obedecería geométricamente a la adición de las dos bases. Dado que así se obtendría una superficie doble que la original ésta se alcanzaría sin más que dividir por dos la superficie obtenida al multiplicar la suma de las bases por la altura.

La segunda posibilidad (figura b) consistiría en construir un rectángulo de superficie equivalente (dibujado con puntos) con la misma altura y una base que fuera intermedia entre las dos bases del trapecio. Si no se hacía de manera aproximada entonces esta semisuma procedería de la observación de que, independientemente del área común (oscura) entre el trapecio y el rectángulo, las dos bandas restantes del rectángulo surgirían de la mitad del triángulo doble de cada triángulo a derecha e izquierda del trapecio.

En beneficio de esta última posibilidad está el hecho de que el romboide que surge en la figura a nunca aparece en los documentos de la matemática egipcia como tal, de manera que no hay un tratamiento explícito ni del rombo ni del romboide por lo que, cuanto menos, no debían ser figuras usuales. Por otro lado, a favor de una vía más aproximativa en torno a la figura b se encuentra el hecho de que, según vimos anteriormente, se debía emplear una fórmula aproximativa para calcular la superficie de un trapezoide cualquiera.

Así, ante un trapezoide de lados no paralelos y desiguales por tanto, la fórmula a emplear consiste en multiplicar la semisuma de los lados opuestos.

lo cual, como se puede apreciar por la figura, no corresponde a un cálculo exacto sino meramente aproximado (como lo será el cálculo del área del círculo) pero suficientemente efectivo para las actividades de censo de las tierras.



El área del círculo

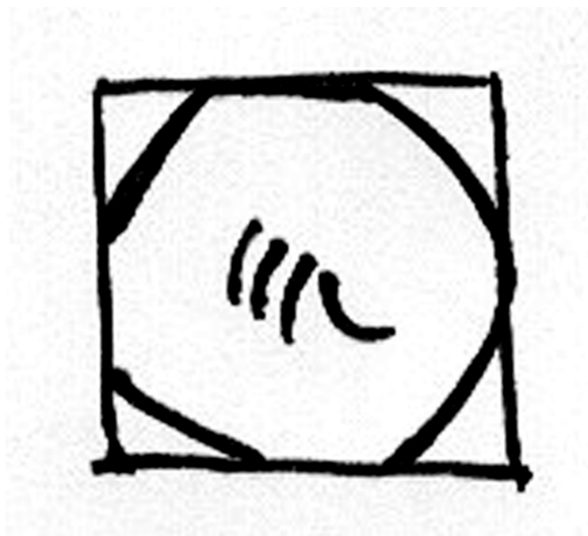
De los campos circulares no queda más testimonio que el presente en el problema 50 del papiro Rhind. Sin embargo, no debían ser difíciles de trazar por cuanto basta clavar una estaca en lo que será el centro y, atando una cuerda a la misma, ir describiendo el círculo con el otro extremo de la cuerda estirada. La imposibilidad de encajar esta figura junto a otras similares hacen de la circularidad de un campo de cultivo algo excepcional pero que evidentemente atrajo la atención de los escribas egipcios. Hay que tener en cuenta, además, que la superficie circular surgía en la resolución de otro tipo de cálculos: los del volumen de un granero cilíndrico (con la consiguiente determinación del área de la base) que se comentará en el capítulo 11.

Los escribas egipcios abordaron la superficie circular mediante su aproximación mediante figuras rectilíneas sencillas y, en concreto, el octógono. El origen de esta equivalencia entre ambas figuras puede residir en las columnas que se erigían en los templos. Desde la IV dinastía hasta el Imperio Nuevo la sección predominante fue cuadrada pero en el Imperio Medio (en particular, durante la construcción por Mentuhotep I de su templo en Deir el-Bahari) se desarrolló una columna poligonal. Esta tenía inicialmente la forma de un cuadrado al que se le cortaban las esquinas dando lugar a un octógono en la misma relación que presenta el papiro Rhind. En éste se comparan las superficies de un octógono y el cuadrado circunscrito.

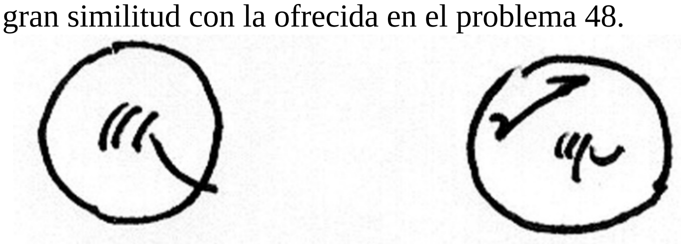
“**Rhind - Problema 48**:

1	8 setat	1	9 setat	✓
2	16 setat	2	18 setat	
4	32 setat	4	36 setat	
8	64 setat ✓	8	72setat	✓
		Total:	81 setat”	

Estas operaciones se acompañan por un dibujo en el que aparece un cuadrado y una figura inscrita que ha sido objeto de discusión.



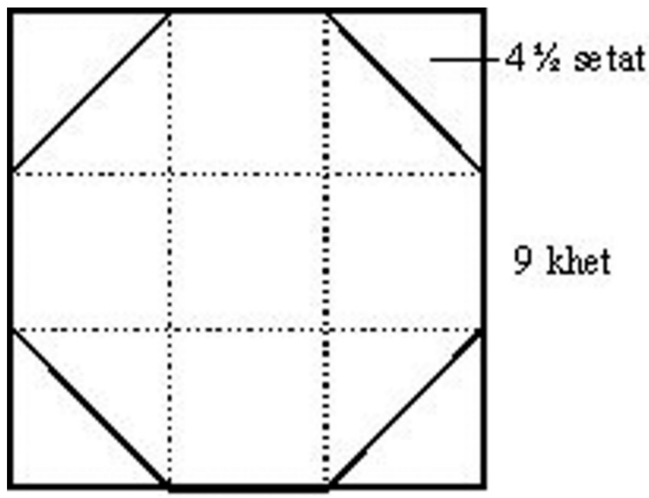
Chace es partidario de que la figura interior es un círculo mientras que Gillings[20] sostiene que es un octógono como el que luego parece tenerse en cuenta de manera implícita en el problema 50. En apoyo de su hipótesis este último autor atiende a la forma en que aparecen los círculos dibujados a mano por el escriba Ahmose en los problemas 41 y 50 (figura adjunta izquierda y derecha, respectivamente), lo que muestra que es capaz de dibujar un círculo bastante regular con dos trazos semicirculares distinguibles. En ese sentido, dichas figuras no muestran gran similitud con la ofrecida en el problema 48.



Sea cual sea la figura inscrita de este problema surge la duda respecto de las operaciones planteadas sin mayor explicación por el escriba. Hay que hacer constar que es la única ocasión en todo el papiro en que su autor no incluye explicación verbal alguna, de manera que se entiende que el dibujo es suficientemente explícito y concebido, probablemente, como un simple apoyo operativo para el resultado del problema 50, el fundamental en el cálculo de superficies circulares.

El sentido de la columna derecha de operaciones (la operación 9 x 9 setat) es bastante claro: Se trata de calcular la superficie de un cuadrado de lado 9 khet, medida que también se encuentra en el problema 50 y en otros del papiro Rhind.

Los resultados de la columna izquierda deben corresponder a la superficie del octógono (o círculo) pero ello merece una explicación. La más satisfactoria es la de Vogel (1929)[21] que considera un cuadrado de 9 khet de lado y trisecciona cada lado, de manera que el cuadrado resulta dividido en nueve cuadrados pequeños de 3 x 3 = 9 setat de superficie cada uno.



Pues bien, si ahora se “recorta” el cuadrado en la mitad de cada cuadradito de las esquinas, la figura resultante es un octógono. Veamos cuál es su superficie.

Cada cuadrado pequeño tiene 9 setat por lo que la mitad correspondiente al triángulo de la esquina será de 4 ½ setat de superficie. Como hay un total de cuatro triángulos que hay que restar al área del cuadrado grande, se tendrá que el área del octógono es:

Área (Octógono) = Área (Cuadrado) - Área (Triángulos de las esquinas) = (9 x 9) - (4 x 4 ½) = = 81 - 18 = 63 setat

En este momento, el escriba busca una medida aproximativa que implique una mayor facilidad de cálculo del octógono correspondiente. Teniendo en cuenta la preferencia operativa por las potencias de 2 se encontraba que $2^6 = 64$ es muy próxima al área deducida anteriormente. Por tanto, si consideramos un cuadrado de 9 khet de lado el producto 9 x 9 = 81 setat (columna derecha del problema 48) daría la superficie del cuadrado mientras que la del octógono inscrito vendría dada (columna izquierda) por la multiplicación por sí mismo del lado del cuadrado menos una unidad (9 - 1 = 8 khet). Este resultado aproximado puede ahora aplicarse directamente al problema 50.

> “**Rhind - Problema 50**: Ejemplo de un campo redondo de diámetro 9 codos. ¿Cuál es el área?. [Solución:] Tomar 1/9 del diámetro, el resto es 8. Multiplicar 8 veces 8; son 64. Por tanto, contiene 64 setat de tierra".

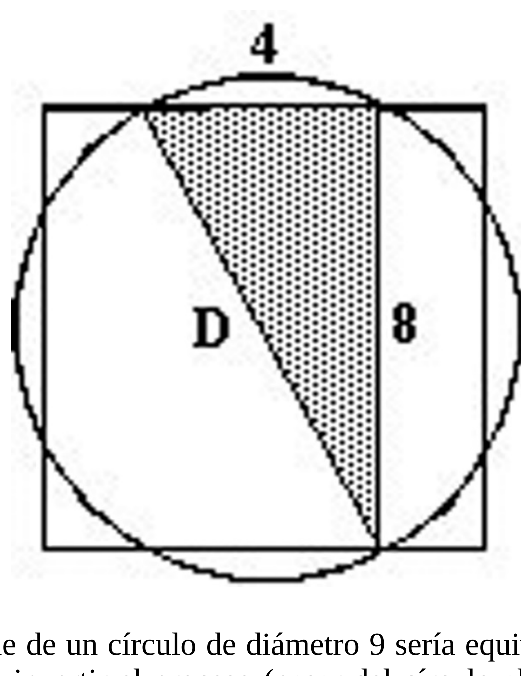
Lo que se hace entonces es identificar por aproximación el área del octógono construido antes con la del círculo inscrito de manera que y siendo d el diámetro del campo circular (que coincide con el lado del cuadrado circunscrito):

fundamento de las operaciones hechas por el escriba al resolver el problema 50.

Se ha sugerido otra forma de cálculo aproximado que podría dar el mismo resultado para los escribas egipcio. “Consistiría en considerar de nuevo un cuadrado cada uno de cuyos lados tiene de longitud 8 y se divide en cuatro partes iguales. Se consideraría entonces un círculo de área aproximadamente igual a la del cuadrado. Esta vez, sin embargo, no sería el cuadrado circunscrito (como en el caso anterior) ni tampoco el inscrito sino uno intermedio cuya circunferencia pasaría por dos de las divisiones de cada uno de los lados.

De esta forma el diámetro D del círculo se calcularía aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo de catetos 8 y 4 que se formaría:

$$D^2 = 8^2 + 4^2 = 80 \quad \Rightarrow \quad D = \sqrt{80} \simeq 9$$



de manera que la superficie de un círculo de diámetro 9 sería equivalente a la de un cuadrado de lado 8, por lo que para invertir el proceso (pasar del círculo al cuadrado) sólo habría que considerar el diámetro del círculo, restar una novena parte y elevar al cuadrado el resto. Es decir, el procedimiento del problema 50.

Sin embargo, esta forma de cálculo resulta más elaborada e improbable que la anterior. Tomar el círculo intermedio entre el inscrito y circunscrito sólo se encuentra en tiempos de Grecia mientras que del teorema de Pitágoras no hay constancia directa de su descubrimiento por la cultura egipcia, por muy probable que fuera. El enfoque aproximativo del primer procedimiento parece más coherente con las situaciones problemáticas de medida de campos por los escribas de la época”[22].

El área de una semiesfera

Un problema del papiro Moscú ha sido objeto de amplios debates entre los egiptólogos. La traducción de Struve que hasta aquí hemos seguido dice lo siguiente:

> “**Moscú - Problema 10**: Ejemplo de cálculo de un cesto (*nbt*). Si te dicen: ‘Un cesto con una apertura de boca de 4 ½ en buenas condiciones, oh, conocer su área”.

continuando con la resolución del problema:

> “Calcular 1/9 de 9, ya que el cesto es ½ de una ¿cáscara de huevo? El resultado es 1. Calcular el resto como 8.
> Calcular 1/9 de 8. El resultado es 2/3 1/6 1/18.
> Calcular el resto de estos 8 después de restar 2/3 1/6 1/18. El resultado es 7 1/9.
> Razonar con 7 1/9 cuatro veces y media. El resultado es 32. Este es el área”.

La primera cuestión que no resulta clara es la de la forma de la figura tratada. Es claro que la ‘apertura de la boca’ se refiere a la superficie de acceso al interior del cesto. Pero las distintas formas de los cestos no se conocen en su totalidad. Hay muestras a partir de los dibujos en cámaras funerarias donde aparecen cestos semiesféricos pero también de otras formas más alargadas, ovoidales o hasta parecidas a semicilindros. De manera que un párrafo aclaratorio correspondería a la primera línea del procedimiento, cuando se habla de que el cesto es como la mitad de ‘algo’, pero la descripción de ese ‘algo’ está seriamente deteriorada en el papiro y sólo cabe especular con datos cuestionables. Struve afirma que se compara con una ‘cáscara de huevo’ mientras que Peet[23] defiende que la comparación es con un ‘semicilindro’.

Aquí nos inclinaremos por la primera interpretación que, desde el punto de vista matemático encierra mayores sugerencias y resulta coherente con el enfoque aproximativo que caracteriza a la matemática egipcia frente a figuras circulares. Así, resultaría que el procedimiento explicado por el escriba correspondería a las siguientes operaciones[24]:

- En primer lugar se considera un círculo de diámetro doble que el marcado por la ‘apertura de la boca’ citada.

  2d = 9
- Se continúa hallando 1/9 de dicha cantidad y restándosela a continuación:

  2 d - 1/9 2 d
- Se repite esta operación pero respecto a la cantidad anterior:

  (2 d - 1/9 2 d) - 1/9 (2 d - 1/9 2 d)
- Y esta es la cantidad que se multiplica finalmente por el diámetro de la boca del cesto:

[(2 d - 1/9 2 d) - 1/9 (2 d - 1/9 2 d)] d

Reduciendo las operaciones entre fracciones, dado que 1 - 1/9 = 8/9, estos pasos serían equivalentes a:

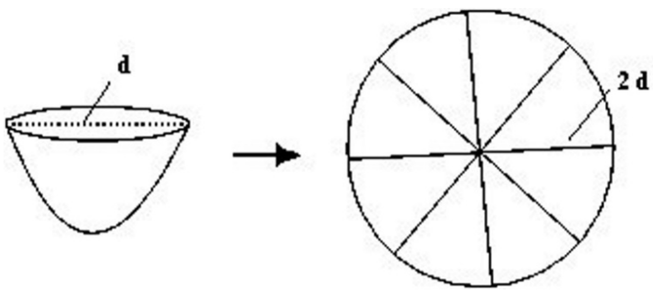
- Considerar 2 d.
- Calcular 8/9 2 d
- Hallar (8/9 de 8/9) 2 d
- Multiplicar [(8/9 de 8/9) 2 d] d

Recuérdese del epígrafe anterior que el área del círculo se hacía igual a:

de manera que el escriba estaría considerando con sus operaciones que

Area (Semiesfera) = 2 (Area Círculo Boca)

que puede representar una aproximación empírica a dicha área de manera que los artesanos podrían observar que si el cesto semiesférico se abriese en forma de 'gajos' (sectores circulares) la superficie extendida se parecería a un círculo de diámetro doble que el marcado por la boca del cesto.



Notas

1 Butzer, K.W. (1976): “Early hydraulic civilization in Egypt”.
2 Warburton, D. (1997): “State and economy in Ancient Egypt”.
3 Gasse, A. (1988): “Données nouvelles administratives et sacerdotales sur l’organisation du domaine d’Amon”. Vol. I.
4 Valbelle, D. (1992): “El Egipto faraónico”.
5 Gasse, A. Op. cit.
6 Ibidem.
7 Ibid, pp. 17, 20, 21.
8 Ibid, p. 12.
9 Couchoud, S. (1998): “Mathematiques egyptiennes”.
10 Robins, G. y Shute, C. (1998): “The Rhind mathematical papyrus”.
11 Peet, T.E. (1923): “The Rhind mathematical papyrus”.
12 Clagett, M. (1999): “Ancient Egyptian science. A souce book”. Vol. III.
13 Padró, J. (1996): “Historia del Egipto faraónico”.
14 Clagett, M. Op. cit.
15 Maza, C. (1991): “Multiplicar y divider”.
16 Maza, C. (1991): “Enseñanza de la multiplicación y division”.
17 Peet, T.E. Op. cit.
18 Cit.en Couchoud, S. Op. cit.
19 Gunn, B. y Peet, T.E. (1929): “Four geometrical problems from the Moscow mathematical papyrus”.
20 Gillings, R.J. (1972): “Mathematics in the time of faraons”.
21 Cit. en Gillings. Op. cit.
22 Maza, C. (2000): “Las Matemáticas de la Antigüedad y su context histórico”, pp. 85-86.
23 Peet, T.E. (1931): “A problem in Egyptian geometry”.
24 Seidenberg, A. (1972): “On the area of a semi-circle”.

Capítulo 7
Sumas de fracciones en la Contabilidad

Los papiros de Abusir

El faraón Neferirkare tuvo un reinado breve (2472 - 2462), tras los de sus hermanos Userkaf y Sahure, todos ellos de la V dinastía. Hizo levantar en Abusir un templo funerario que debió estar unido por una calzada, como era habitual, a un templo solar del que nada ha quedado. Sin embargo, sí hay restos del primero. Hacia 1893 unos excavadores clandestinos encontraron una serie de papiros que, muy repartidos en diversos museos, tardaron casi 75 años en ver su edición completa[1].

Los papiros del templo funerario de Neferirkare-Kakai, como fueron conocidos, muestran un registro contable extremadamente detallado de los bienes del templo desde la época del faraón fundador hasta la de Pepi II (2288 - 2194): Tablas de servicio del personal del templo, inventarios de sus bienes, lista de ofrendas recibidas junto a su origen, etc., todo ello en largos papiros cuadriculados que suponen una muestra incompleta de los archivos originales puesto que abarcan un largo período de tiempo a base de mostrar los registros de algunos meses esporádicos.

Pese a ello la riqueza de estos registros es indudable dada la carestía de una documentación equivalente que haya sobrevivido desde el Imperio Antiguo. Una muestra correspondiente a una sola década (diez días) sería la siguiente[2]:

Nombre supervisor de la entrada	por medio de entregas enviadas a la residencia						Lugar de procedencia	Traído del palacio			El altar de Re en el templo solar		
	jarra sejp.	jarra cerv.	jarra har.	Pan beset	Pan pese	Pan het.		Pan ida, padj, hetja, pesen. Cerveza			Envíos de pan pat		
.								18		18			14
empleados								18		18			14
del templo		3		1	1		finca Kakai	18		18			14
									18	18			14
	1	1	1	1	1	1	Lu-Shedefui		18	18		70	14
									18	18			14
Ni Anj Kakai		3		1	1		finca Kakai	18		18	14		14
								18		18	14		14
hijo de Atu								18		18	14		14

Cada línea horizontal corresponde a los ingresos diarios del templo. En las columnas se especifica el nombre del supervisor responsable de registrar la entrada, las jarras y los panes enviados desde las tierras directamente dependientes del templo funerario, particularmente la finca de Kakai. A continuación se especifican las entradas de estas mismas mercancías con dos procedencias distintas: las que llegan del palacio real y las correspondientes al templo solar asociado al templo funerario de Neferirkare. Los datos encontrados en estos papiros

> "... muestran que el templo funerario y el templo solar forman un conjunto indisociable y que, de los dos santuarios del rey, no era el templo funerario el más importante, económicamente al menos, sino que el primero no constituía más que un anexo del segundo, anexo necesario e igualmente esencial, puesto que era en la pirámide [junto a la que se construía el templo funerario] donde se sepultaba el cuerpo del rey difunto"[3].

Los registros diarios se reunían en datos mensuales lo que obligaba a realizar numerosas sumas de las distintas mercancías contabilizando las cantidades recibidas y comparándolas con las que tenían que recibirse. El volumen de mercancías entrantes debía ser bastante crecido por algunos datos que han llegado hasta nosotros. El templo de Neferirkare, una construcción modesta en ladrillo consumía, cincuenta años después de la muerte del faraón que lo mandó construir, 660 aves y 30 bueyes mensualmente, es decir, unas 8.000 aves y 365 bueyes por año[4], por poner tan sólo dos ejemplos de animales. Muchos siglos después, el templo de Ramsés III en Medinet Habu recogía diariamente 5.500 hogazas de pan, 54 pasteles, 34 bandejas de dulces, 204 jarras de cerveza y un amplio surtido de otros alimentos[5].

Todo ello servía para las ofrendas funerarias además de las dirigidas expresamente al dios. Además, había que alimentar a un conjunto numeroso de sacerdotes por un lado y de personal administrativo y técnico por otro. El 'Sumo Sacerdote' o 'primer profeta' era el máximo responsable del lugar, siguiéndole el segundo, tercer y cuarto profetas[6]. Luego aparecían los sacerdotes 'servidores del dios' que, organizados en cuatro equipos (*phylài* en griego) habitualmente, trabajaban alternativamente un mes completando tres meses de trabajo anuales. Más abajo, un grupo numeroso de sacerdotes 'puros' (incluídos los 'lectores') que se encargaban de tareas poco importantes como traer los animales del sacrificio, limpiar el templo, transportar la barca en las procesiones, etc. Si a esto se añadían los escribas, artesanos, remeros, alfareros, cocineros y miembros de otros oficios junto a sus familias, se podrá suponer que una parte importante de la población egipcia vivía en torno al templo y requería un salario en forma de raciones de trigo, cerveza (como alimentos) así como otras mercancías (sandalias, muebles, jarras, etc.) que se obtenían directamente del templo o por trueque con otras personas en sus mismas circunstancias.

En resumen, los papiros contables de Abusir deben haber sido una muestra pequeña de una actividad constante en los templos del registro de numerosas mercancías que entraban tanto para satisfacer el culto (al faraón fallecido y al dios) como para atender las necesidades de todo el personal (sacerdotes, administrativos, artesanos, etc) asociado al templo sea de manera permanente o temporal. Estos papiros de contabilidad precisaban hacer balances mensuales o incluso anuales de cada una de las mercancías entrantes, lo que precisaba la realización de sumas y multiplicaciones que en ocasiones, como los ejemplos que veremos a continuación, incluía el uso sistemático de fracciones.

Empleo de fracciones en la Contabilidad

No todos los registros contables que han sobrevivido al tiempo presentan anotaciones enteras ya que, en bastantes casos, las mercancías recibidas pueden escribirse mediante el uso de fracciones. Sin embargo, cuando los registros utilizan unidades de medida (peso, capacidad, por ejemplo) es posible eludir el uso de fracciones o al menos simplificarlo considerablemente cuantificando las cantidades por medio de unidades y subunidades.

Tal sucede en un ejemplo ya mostrado en un capítulo anterior y del que ahora ofrecemos otra muestra. El papiro Harris presenta, entre otros, una serie de objetos de plata que vienen expresados en deben y kite de dicho material[7] (ver figura en la página siguiente).

Independientemente de los errores en la suma total que realmente son 836 deben y 8 ½ kite de plata (a razón de 10 kite = 1 deben de plata), es posible observar varios hechos:

- Se minimiza el cálculo con fracciones por medio de la expresión del peso en la unidad (deben) y su subunidad más importante (kite).
- Pese a ello es necesaria la suma de fracciones que, pese a su sencillez, muestra una imprecisión que denota un descuido al hallar el resultado final y resalta el carácter aproximativo que a veces adoptaba el cálculo aritmético entre los egipcios.

Material	Deben	Kite
Jarrones de plata, borde trabajado en oro, 1	112	5
Tapa de plata para jarrón, 1	12	3
Filtro de plata, 1	27	7
Jarra de plata, 4	57	4 1/2
Cajas grandes de plata con tapa, 31	105	4
Cofrecillos de plata con tapa, 31	74	4
Cajas de plata para armas, 6	30	3
Lápida grabada de plata, 1	19	3 1/2
Lápida grabada de plata, 2	287	1/2
Restos de plata	100	
Total de plata en artículos y restos	827	1 1/4

- Es posible que, de manera implícita, se encuentren multiplicaciones entre enteros o con fracciones. Así, 6 cajas de plata pesan 30 deben y 3 kite de manera que, en caso de ser todas iguales, el resultado parcial se obtendría multiplicando 5 deben ½ kite (el peso de cada caja) por seis unidades. Sin embargo, esto no siempre es así. Las lápidas de plata muestran a ese respecto una disparidad de precios que denotan ser probablemente de tamaño distinto entre sí.

Estas multiplicaciones encubiertas resultan ser más frecuentes de lo que los registros contables muestran. Ello se puede observar en la estela denominada Cairo JE 66285[8] en la que se concede al que luego sería el fundador de la XXII dinastía, Sheshonk I (945 - 924), el establecimiento de un culto funerario a favor de su padre Nemrod, ya fallecido, el gran jefe de la tribu de los ‘mashouash’.

Los bienes iniciales para este culto eran de 35 deben de plata, 15 de ellos aportados por los delegados del gran jefe de la tribu a la que pertenecía Nemrod y los 20 deben restantes correspondientes a una donación real. Estos bienes aparecen desglosados de manera detallada en sus epígrafes pero con imprecisión en cuanto a la suma de los totales, como luego se comprobará. Las aportaciones combinan tierras, animales (bueyes), trabajadores e incluso pesos de plata provenientes del granero de Osiris[9]:

	Deben	Kite
Tierras	10	
5 cultivadores	4	1
10 bueyes	2	
1 pastor		6 2/3
1 jardín	2	
1 jardinero		6 2/3
1 tejedor		6 2/3
3 tejedores no evaluados		
5 apicultores	3 2/3	
5 turiferarios	3 2/3	
1 oleicultor		6 2/3
Donación anónima: 2 cerveceros		6 2/3
Donación anónima: 1/4 pastelero		1
Granero de Osiris	8	8 1/3

Si excluimos la donación anónima, el total resultante obliga a sumar deben entre sí, y kite entre sí, cada uno con sus fracciones y teniendo en cuenta que 2/3 + 2/3 = 1 1/3. El resultado total alcanza los 33 deben y 16 kite que equivalen a 34 deben y 6 kite (cantidad aproximada pero no exactamente igual a los 35 deben que deberían figurar).

Sin embargo, otras operaciones con las fracciones reclaman en seguida la atención. Se puede observar que la mayoría de los trabajadores están valorados en 6 2/3 kite de plata. Pero cuando se trata de valorar 5 apicultores, por ejemplo, se hace necesaria la operación

$$5 \times 6\,2/3 = (5 \times 6) + (5 \times 2/3) = 30 + 10/3 =$$
$$= 33\,1/3 \text{ kite} = 3 \text{ deben } 3\,1/3 \text{ kite} = 3\,1/3 \text{ deben}$$

Ya se comprobará más adelante que la fracción 10/3 no es planteada así por los egipcios pero, independientemente de ello, es obvio que estamos ante una multiplicación de números naturales por fracciones y una serie de cálculos de transformación (3 1/3 kite = 1/3 deben) que no son inmediatos y ante las cuales el escriba parece cometer un error (al escribir como resultado final 3 2/3 deben).

Si ahora nos fijamos en los 5 cultivadores podemos comprobar que el resultado final (4 deben 1 kite) no se corresponde con los cálculos anteriores. Ello es debido a que el escriba se veía obligado a plantear el hecho de que Paour, el jefe de los cultivadores, era valorado en 1 deben y 4 1/3 kite de plata pagados por el tesoro de Osirirs, mientras que los demás cultivadores se tasaban por el valor acostumbrado de 6 2/3 kite. De esta manera el cálculo que debía hacer era el siguiente:

$$4 \times 6\ 2/3 = (4 \times 6) + (4 \times 2/3) =$$
$$= 24 + 2\ 2/3 = 26\ 2/3 \text{ kite}$$

1 deben 4 1/3 kite + 26 2/3 kite =
= 1 deben 31 kite = 4 deben 1 kite

tal como figura en la estela, esta vez correctamente calculado.

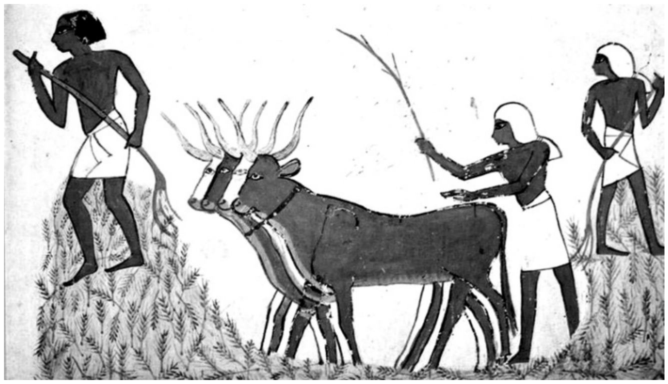
Así pues, la contabilidad requería el empleo de fracciones y el cálculo con ellas aunque su uso estuviera limitado por el empleo de unidades y subunidades de medida. El escriba, por tanto, debía conocer y operar con facilidad las fracciones y ello se hacía aún más evidente cuando la operación a realizar era la multiplicación de fracciones que se mostrará más adelante.

La organización del trabajo

Se ha comentado en el capítulo 3 algunas de las distintas aportaciones del campesino egipcio a los trabajos emprendidos por el faraón. Dentro del modelo redistributivo que caracteriza en su mayor parte a la historia egipcia los trabajos públicos constituían uno de los instrumentos fundamentales para la buena marcha económica del país, de manera que no es posible asegurar que las grandes obras faraónicas se hicieran exclusivamente a costa de unos sufridos trabajadores sino que también se puede argumentar que un grupo numeroso de éstos, al igual que tantas personas en torno a los templos funerarios, podían subsistir en no pequeña medida gracias a estas obras faraónicas que les permitían recibir al menos raciones de subsistencia.

En este contexto, las aportaciones del campesino egipcio a los proyectos del rey son de tres tipos[10]:

- La corvea temporal tenía como objetivo el cultivo de las tierras pertenecientes a los dominios reales así como enfrentarse a los problemas generados por la crecida del Nilo, sea en la construcción de diques y canales o su desatascamiento cuando era necesario.
- Fuera de la estación de cultivo y recogida de la cosecha se contaban varios meses en que, una vez que tenía lugar la crecida, el campesino permanecía básicamente desocupado respecto a su tarea principal. Ese tiempo se dedicaba a los trabajos de gran envergadura como a la construcción de templos u otros edificios reales.
- Por último, era necesaria a veces una recluta de trabajadores y artesanos de todo tipo para llevar a cabo expediciones comerciales o de extracción de minerales (turquesa, cobre, amatista, etc.).



Todas estas actividades requerían una organización detallada por parte de los escribas encargados. Por ejemplo las expediciones, como hemos visto en el capítulo 3, podían llegar a estar constituidas por miles de personas a las que había que alimentar, proporcionarles sandalias y agua, organizar en turnos de trabajo según su especialidad, todo lo cual requería una buena organización. En la inscripción nº 61 del Uadi Hammamat el jefe de la expedición, Henu, alardea de dirigir a 3.000 hombres a los que proporciona todo lo que necesitan para su vestido y su sustento, entre los que se pueden contar 30 cazadores, 100 canteros, 100 talladores de piedra, 200 marineros (puesto que se dirigía al país de Punt), 60 pescadores, 60 zapateros, 1700 hombres para todo tipo de trabajos a los que había que añadir 20 cerveceros, 20 molineros, 20 panaderos y 50 servidores. El resto estaba formado por escribas, magistrados y guerreros.

El trabajo en la construcción de templos y demás edificios públicos requería también una cuidadosa organización de los equipos de trabajo además de su recluta y transporte desde sus lugares de origen. A este respecto, uno de los documentos de mayor interés son los llamados papiros Reisner, un conjunto de documentos contables y administrativos que, situados en la dinastía XII (probablemente el reino de Sesostris I, 1919 - 1875), muestran la gestión efectuada para la construcción de lo que parece un templo o tumba, ya que se mencionan una cámara real y una capilla, en la ciudad de This.

En concreto, el papiro Reisner I incluye en tres de sus partes (numeradas alfabéticamente) los siguientes contenidos:

Parte G: Se registran cálculos de excavaciones en el templo (o tumba) junto a los alistamientos necesarios para llevarlas a cabo, con especificación del número de trabajadores disponible en cada caso.

Parte H: No aparece el número de trabajadores pero sí se realizan cálculos sobre volúmenes de bloques de piedra necesarios.

Parte I: Es semejante a la parte anterior pero concretando su utilización en la construcción de suelos, muros y corredores.

Con el examen de algunos de los casos encontrados en el papiro Reisner I podremos acercarnos a un contexto específico que obligaba a la multiplicación de fracciones. En todo caso se encuentra escrito el volumen de piedra empleado por medio de sus tres medidas (Longitud, Anchura, Grosor) a lo que se añaden las unidades para alcanzar en una columna siguiente el volumen total de la piedra.

Línea	Longitud	Anchura	Grosor	Unidades	Volumen	Detalle
4	15	5			5	Cámara real
5	3	[2]	[2]	1	12	
6	8	5	1/4	1	10	Capilla Este
7	3	2 1/2	1/4	1	2 1/2	Portal cámara
8	35	11	[1/2]	[1]	[1]92 1/2	
9	13	11	1 1/2	1	[2]14 1/2	
10	52	3	1/4	1	39	
11	32	4	1/2	1	85	
12	3 1/2	2	1/4	1	4 2/3	

La muestra de alguna de estas líneas es suficiente para encontrar, en el cálculo del volumen de la piedra empleada, un contexto fundamental para comprender la necesidad que tenían los escribas de multiplicar todo tipo de números, incluidas las fracciones. En efecto, hay ocasiones en que la multiplicación efectuada entre las dimensiones se realiza sólo con enteros (línea 5), pero lo usual es que se encuentren una o varias fracciones.

Así, en la línea 6 encontramos una operación relativamente sencilla:

$$8 \text{ x } 5 \text{ x } 1/4 = 40 \text{ x } 1/4 = 10$$

pero ésta se complica en la línea 7:

$$3 \text{ x } 2\ ½ \text{ x } 1/4 = [\ 3 \text{ x } (2 + ½)] \text{ x } 1/4 =$$
$$= (6 + 1\ ½\ ) \text{ x } 1/4 = 7\ ½ \text{ x } 1/4 =$$
$$= (7 + ½\ ) \text{ x } 1/4 = (\ 7 \text{ x } 1/4\ ) + (\ ½ \text{ x } 1/4\ ) =$$
$$= 1\ 3/4 + 1/8$$

Sean o no éstas las operaciones realizadas por el escriba es evidente que la multiplicación de Número natural x Fracción

Fracción x Fracción

eran operaciones obligadas para el cálculo de estos volúmenes de piedra.

La cuestión podía llegar a ser más compleja cuando el cálculo de volúmenes de piedra se realizaba, como en la parte H (ver página siguiente), con dimensiones expresadas en codos, palmos y ¡dedos!, lo que muestra la minuciosidad de los escribas egipcios y la complejidad operativa que ello acarreaba.

Estas partes de los papiros Reisner I, a las que volveremos más adelante para examinarlas con mayor detalle, obligan a tratar de manera específica las fracciones en las matemáticas egipcias. Tema central éste que justifica su presencia a lo largo de los próximos capítulos en que, con su tratamiento, las matemáticas egipcias muestran todas sus posibilidades y limitaciones, así como el 'virtuosismo' que debió caracterizar el trabajo aritmético del escriba.

Papiro Reisner I - H

Línea	Longitud	Anchura	Grosor	Unidades	Volumen
15	1 c, 5 p	1 1/2 c	1	2	3 c , 5 p
16	2 c , 3 p	1 c , 4 p	5 p , 2 d	1	2 c, 5 p, 21/2 d
17	4 c	1 c , 3 p	1 c	4	22 c , 6 p
18	3 c , 2 p	1 c , 2 p	0,75	1	3 c, 3 p, 2 1/3 d
19	3 c , 5 p , 2 d	1 c , 3 p	1 c	1	4 c , 2 p , 3 d
20	3 c , 3 p	1 c , 3 p	1 c	1	5 c

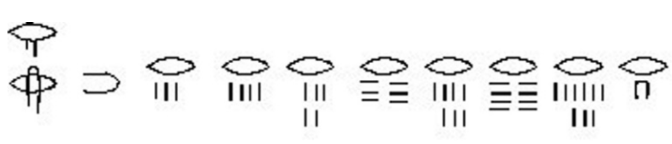
La noción y representación de la fracción

A lo largo de varias páginas ha surgido con asiduidad la necesidad de utilizar fracciones, habitualmente en un contexto de medida. Sea porque se disponga de 6 2/3 kite o porque la longitud de una piedra sea de 6 ½ codos las fracciones surgen con el objetivo de expresar una medida más exacta de la cantidad en cuestión. Aparte del hecho de que la medida sea uno de los orígenes operativos más importantes en el uso por el egipcio de las fracciones debemos detenernos para analizar más pormenorizadamente el propio concepto de fracción.

El primer hecho destacable es que la matemática egipcia, salvo escasas excepciones (el 2/3 la más destacada), utilizó exclusivamente fracciones unitarias, es decir, aquéllas que tienen a la unidad como numerador. Una explicación razonable de esta limitación será abordada en el próximo capítulo, cuando veamos a las fracciones surgir en un contexto de reparto antes que de medida. Sin embargo, también se ha defendido que la limitación a las fracciones unitarias tenía relación con la propia representación jeroglífica de las fracciones, carente de toda referencia a la fracción como una entidad formada por la relación entre dos números.

Pues bien, esta representación consistía en un jeroglífico que representaba una boca bajo la cual se alineaba el número de que constaba el ‘denominador’ de la fracción. Podemos comprobar así que las distintas fracciones se iban formando del mismo modo excepto el ½ que, quizá por su frecuencia, tenía un símbolo propio (ver página siguiente).

El jeroglífico correspondiente a la ‘boca’ se pronunciaba ‘r’, del mismo modo que la subunidad ‘rô’, que equivalía a 1/320 de hekat, unidad con la que se medía la capacidad de grano de un recipiente. Todo ello lleva a defender la estrecha relación entre todos estos elementos[11]. Así, el rô sería la parte más pequeña del hekat correspondiente a la cantidad de grano que puede caber en una boca, de manera que se pasaría a que la representación de ‘boca’ significara ‘bocado’.



2/3 ½ 1/3 1/4 1/5 1/6 1/7 1/8 1/9 1/10

Otros significados asociados al símbolo son los de ‘ración’, ‘porción’ y ‘parte’, de modo que el origen de la representación queda más claro así y da una información de interés: La representación de 1/4 será una boca con un 4 bajo ella, es decir, cada una de las ‘partes’ o ‘porciones’ cuando el ‘bocado’ se divide en cuatro de estas partes.

Ahora bien, hay cierta controversia entre los estudiosos sobre el hecho de que los egipcios consideraran que la fracción es una parte entre las que se puede dividir la unidad o si consideraban a esta parte como una unidad propia[12]. No es fácil dirimir esta cuestión relacionada con la metrología. Así, la expresión de ‘4 deben 1 kite’, considerado el kite como una unidad con entidad propia, evita el uso de fracciones que de otro modo habría que expresar como ‘4 1/10 deben’. Esta elusión del empleo de fracciones es más probable cuando la relación entre la unidad y subunidades es lineal y única como, por ejemplo, lo que sucede actualmente en la medida de la longitud:

Metro → Decímetro → Centímetro → Milímetro
1 → 10
1 → 10
1 → 10

El empleo de la noción de fracción como ‘parte de la unidad’ antes que como ‘unidad propia’ parece más adecuado cuando la relación entre la unidad y sus subunidades no es única ni lineal de manera que la unidad se relacione de modo diferente con unas subunidades que no tienen una clara relación entre sí:

Unidad → ½ unidad
1 → 2
Unidad → 1/3 unidad
1 → 3
Unidad → 1/4 unidad
1 → 4

Esta situación favorece la concepción de la fracción como parte de la unidad. Tanto por este motivo como por el concepto de fracción que surge a partir de la idea de reparto (capítulo 8) concluiremos que la concepción más probable que tenía el antiguo egipcio de la fracción es la de una ‘parte’ de la unidad.

Ahora es posible comprender mejor por qué se ha defendido la idea de que el sistema de escritura de las fracciones ha sido un obstáculo en la generalización del concepto de fracción a otras no unitarias. Para pasar de 1/4 a 2/4 ó a 3/4 es necesario poder representar la fracción por medio de dos números, el que indica el número de partes en que se ha dividido la unidad (denominador) y el que muestra el número de partes escogido (numerador). Si la representación lo impide al mostrar sólo lo que actualmente entendemos por denominador se hará imposible representar otras fracciones distintas de las unitarias.

Esta hipótesis, sin embargo, no puede defenderse *in toto*. La forma de representación muestra que los egipcios sólo concebían la noción de fracción unitaria. Además, esta forma de representación es muy coherente con la concepción mencionada y no favorece otras nociones (en concreto, las fracciones no unitarias). Es de suponer, no obstante, que si el escriba egipcio hubiera construido una noción más general de la fracción hubiera buscado la forma de superar su forma de representación habitual como hicieron con el 2/3 o lograron en su momento los árabes al introducir el concepto de ‘número roto’ por medio de una barra separadora de dos números. El hecho de que los egipcios no lo hicieran conduce a pensar que, si bien la forma de escritura era un obstáculo, tampoco en la práctica matemática el egipcio se planteó generalizar el concepto de fracción rebasando el marco creado por las fracciones unitarias. Y ello porque en el concepto de fracción que ellos construyeron sólo cabían las fracciones unitarias. La demostración está en el hecho de que llegaron a un virtuosismo operativo extraordinario pero también muy complejo con las fracciones unitarias de manera que ni siquiera las necesidades de simplificación operativa pudieron vencer esa concepción de la fracción en la que sólo eran factibles las fracciones unitarias.

Tras lo dicho, no resulta ya caprichoso acogerse a la notación de las fracciones egipcias que propuso en su día Neugebauer por la que aparecerían simbolizadas por medio de una raya horizontal sobre el número que indica el denominador. Por facilidad de transcripción aquí lo haremos también con la raya por debajo. Así, 1/2 se notaría como $\underline{2}$ mientras que 1/28 sería $\underline{28}$ (en general, 1/n se escribiría $\underline{n}$) lo que refleja mejor la utilización de un solo número en las fracciones por los escribas egipcios. La única salvedad reseñable es la fracción 2/3 que será escrita ⅔ para poder distinguirla de $\underline{3}$.

Necesidad de la suma de fracciones

Hemos visto ya diversos casos de suma de fracciones unitarias planteadas a partir de la contabilidad de diversas cantidades que debían sumarse para hallar los totales correspondientes. Ahora plantearemos la necesidad de sumar fracciones en una de sus fuentes más importantes: La realización de multiplicaciones tal como se han comentado en el capítulo anterior.

En el papiro Reisner I se han mostrado diversos cálculos del volumen de piedra. En concreto, la línea G.7 plantea unas dimensiones de 3 codos de longitud, 2 $\underline{2}$ de anchura por $\underline{4}$ de grosor. El cálculo del volumen (2 $\underline{2}$ codos cúbicos en total) se realizaría multiplicando entre sí estas dimensiones. En primer lugar, la longitud por la anchura

1	2 $\underline{2}$	✓
2	5	✓

3	7 $\underline{2}$	

y el resultado por el grosor sería 7 $\underline{2}$ x $\underline{4}$:

1	$\underline{4}$	✓
2	$\underline{2}$	✓
4	1	✓
$\underline{2}$	$\underline{8}$	✓
------------		
7 $\underline{2}$	1 $\underline{2}$ $\underline{4}$ $\underline{8}$	

El método de duplicación en que consiste el algoritmo multiplicativo egipcio implica un tratamiento determinado de las fracciones:

- En primer lugar, duplicar fracciones de manera que si a una vez le corresponde el $\underline{4}$, dos veces serán $\underline{4} + \underline{4} = \underline{2}$.
- Por otro lado, la necesidad de hallar el correspondiente a media vez implica la descomposición de $\underline{4}$ en dos fracciones iguales, hecho que se cumple con $\underline{4} = \underline{8} + \underline{8}$.
- Finalmente, en el resultado final obtenido por la suma en la columna de la derecha se puede encontrar una suma de fracciones que convendría reducir, sobre todo si es un resultado parcial que debe operarse después.

Así, en el problema 81 del papiro Rhind se plantea hallar las fracciones del ojo de Horus para un heqat de manera que si cada heqat equivale a 10 hin,

Hekat	Hin
1	10
2	5
4	2 $\underline{2}$
8	1 $\underline{4}$
$\underline{16}$	$\underline{2}$ $\underline{8}$
$\underline{32}$	$\underline{4}$ $\underline{16}$
$\underline{64}$	$\underline{8}$ $\underline{32}$

Esta necesidad de expresar una fracción como suma de dos iguales (cada una de las cuales constituye su mitad) es fácilmente realizable en aquellas fracciones con denominador par.

"**Rhind - Problema 11**: [Multiplicar $\underline{7}$ por 1 $\underline{2}$ $\underline{4}$]

1	$\underline{7}$	✓
$\underline{2}$	$\underline{14}$	✓
$\underline{4}$	$\underline{28}$	✓
Total:	$\underline{4}$"	

¿De dónde obtenía el escriba la solución final? Realizada la multiplicación resultaría que la última fila señalando el total debería adoptar la forma

$$1\ \underline{2}\ \underline{4} \qquad \underline{7}\ \underline{14}\ \underline{28}$$

de manera que, mediante algún tipo de cálculo, el escriba aplica el hecho de que

$$\underline{7}\ \underline{14}\ \underline{28} = \underline{4}$$

Esta forma de simplificación podía extenderse según la complejidad de la operación realizada. De esta manera, si se desease multiplicar 4 $\underline{3}$ $\underline{6}$ por $\underline{3}$ debería plantearse

1	$\underline{3}$	
2	⅔	
4	1 $\underline{3}$	✓
$\underline{3}$	$\underline{9}$	✓
$\underline{6}$	$\underline{18}$	✓

$4\ \underline{3}\ \underline{6} \qquad 1\ \underline{3}\ \underline{9}\ \underline{18}$

a lo que el escriba podría aplicar sumas de fracciones que sabemos conocidas en aquel tiempo, de manera que se obtuviese finalmente

$$1\ \underline{3}\ \underline{9}\ \underline{18} = 1\ \underline{3}\ (\underline{9}\ \underline{18}) = 1\ \underline{3}\ \underline{6} = 1\ (\underline{3}\ \underline{6}) = 1\ \underline{2}$$

La conclusión que puede extraerse de estas operaciones es que el escriba necesitaba dominar la suma de fracciones unitarias expresando el resultado, claro está, como otras fracciones unitarias, tanto para la realización de sumas en contextos contables o fiscales como al efectuar las diversas multiplicaciones que se encontraban en los mismos ámbitos económicos.

El Rollo de cuero

En 1864 el British Museum adquiría un conjunto de documentos egipcios que habían estado en posesión de Henry Rhind y que se habían puesto a la venta tras su fallecimiento. Entre ellos estaba un rollo de cuero en un estado tal que hacía difícil, con las técnicas de la época, su desenrollamiento. El profesor Griffith pudo examinarlo constatando la presencia de signos aritméticos que, unidos al hecho comprobado de que parecía haberse encontrado en la misma habitación que el papiro Rhind, hizo concebir unas grandes esperanzas respecto a su contenido. Cuando finalmente en 1927 pudo desenrollarse de manera adecuada se comprobó (con cierta decepción) que sólo registraba un conjunto de sumas de fracciones en cuatro columnas, de las que las dos últimas parecían copias fieles de las dos primeras (incluídos tres errores que aparecen en otros tantos resultados). Esta fidelidad en la copia sugería que se trataba de un mero ejercicio de práctica en dichas sumas para mejorar el aprendizaje de un estudiante avanzado (los símbolos están escritos con mucho cuidado), hecho que parece completar el cuadro de un papiro Rhind dedicado fundamentalmente a la enseñanza. En suma, que aquella habitación parecía pertenecer a la casa de un maestro de futuros escribas.

El estudio realizado el mismo año de conocerse su contenido por Glanville[13] mostró que, pese a no responder a las grandes expectativas creadas, el Rollo de cuero no estaba exento de interés. Atendiendo a las columnas tercera y cuarta (las más legibles y completas) había un total de 26 sumas distintas de fracciones que, como Gillings[14] ha mostrado posteriormente, se pueden agrupar de un modo que refleja el conocimiento egipcio sobre la suma de fracciones. Este autor utiliza para su agrupamiento la propia estructura numérica de las fracciones implicadas mediante dos criterios:

> En primer lugar, el número de fracciones que son sumadas para dar un resultado en forma de una única fracción unitaria. Así se pueden distinguir resultados de dos, tres y hasta cuatro fracciones sumadas.
>
> En segundo lugar, la relación numérica de los denominadores en las fracciones sumadas. De este modo, la suma $\underline{9} + \underline{18}$ responde al generador (1,2) ya que dando al menor denominador (9) el valor 1 en el generador, el otro (18) corresponderá a 2. Igualmente, la suma $\underline{14} + \underline{21} + \underline{42}$ obedecería al generador (2, 3, 6) debido a que la asignación de 1 al denominador 14 originaría una relación numérica fraccionaria que, por simplicidad, es mejor eludir.

De esta manera, se tendría el siguiente conjunto de sumas de fracciones en el rollo de cuero una vez agrupadas[15] a las que se han añadido otras sumas similares que aparecen en el papiro Rhind:

Generador	Línea del rollo	Suma
(1 , 1)	7	$\overline{3}+\overline{3}=2/3$
	5	$\overline{6}+\overline{6}=\overline{3}$
	4	$\overline{10}+\overline{10}=\overline{5}$
(1 , 2)	Rhind	$\overline{3}+\overline{6}=\overline{2}$
	Rhind	$\overline{6}+\overline{12}=\overline{4}$
	11	$\overline{9}+\overline{18}=\overline{6}$
	13	$\overline{12}+\overline{24}=\overline{8}$
	24	$\overline{15}+\overline{30}=\overline{10}$
	20	$\overline{18}+\overline{36}=\overline{12}$
	21	$\overline{21}+\overline{42}=\overline{14}$
	19	$\overline{24}+\overline{48}=\overline{16}$
	23	$\overline{30}+\overline{60}=\overline{20}$
	22	$\overline{45}+\overline{90}=\overline{30}$
	25	$\overline{48}+\overline{96}=\overline{32}$
	26	$\overline{96}+\overline{192}=\overline{64}$
(1 , 3)	3	$\overline{4}+\overline{12}=\overline{3}$
	Rhind	$\overline{8}+\overline{24}=\overline{6}$
	Rhind	$\overline{12}+\overline{36}=\overline{9}$
(1 , 4)	2	$\overline{5}+\overline{20}=\overline{4}$
	1	$\overline{10}+\overline{40}=\overline{8}$
(1 , 6)	Rhind	$\overline{7}+\overline{42}=\overline{6}$
	Rhind	$\overline{14}+\overline{84}=\overline{12}$
(2 , 3)	Rhind	$\overline{10}+\overline{15}=\overline{6}$

CON TRES SUMANDOS

Generador	Línea del rollo	Suma
(1 , 1 , 1)	6	$\overline{6}+\overline{6}+\overline{6}=\overline{2}$
(1 , 2 , 4)	12	$\overline{7}+\overline{14}+\overline{28}=\overline{4}$
	Rhind	$\overline{14}+\overline{28}+\overline{56}=\overline{8}$
(1 , 2 , 6)	10	$\overline{25}+\overline{50}+\overline{150}=\overline{15}$
(2 , 3 , 6)	Rhind	$\overline{6}+\overline{9}+\overline{18}=\overline{3}$
	14	$\overline{14}+\overline{21}+\overline{42}=\overline{7}$
	15	$\overline{18}+\overline{27}+\overline{54}=\overline{9}$
	16	$\overline{22}+\overline{33}+\overline{66}=\overline{11}$
	17	¿$\overline{26}+\overline{39}+\overline{78}=\overline{13}$?
	18	$\overline{30}+\overline{45}+\overline{90}=\overline{15}$

Tabla 7.6 b

CON CUATRO SUMANDOS

Generador	Línea del rollo	Suma
(3,5,15,40)	8	$\overline{15}+\overline{25}+\overline{75}+\overline{200}=\overline{8}$
	9	$\overline{30}+\overline{50}+\overline{150}+\overline{400}=\overline{16}$
	17	¿$\overline{28}+\overline{49}+\overline{98}+\overline{196}=\overline{14}$?

La cuestión que se plantea inmediatamente a la vista de estos resultados es ¿cómo construyeron estos resultados pese a las limitaciones que presentaba el uso reducido a las fracciones unitarias? Existen varios procedimientos que permiten alcanzarlos ninguno de los cuales excluye el uso de los restantes. Pasaremos entonces a la descripción de dichos procedimientos examinando en particular en qué sumas de fracciones resultan aplicables con mayor simplicidad.

La construcción de las sumas de fracciones

El supuesto fundamental en la reconstrucción del camino seguido por los escribas a lo largo del tiempo consiste en que la composición de sumas de fracciones debe haber ido desde las más simples a las más complejas. A partir de este hecho, el procedimiento básico consistirá en el planteamiento de un número variable de fracciones iguales que, por reagrupamiento y utilización de resultados anteriores más simples, conduce a nuevas sumas de fracciones. Utilizando este procedimiento básico será posible inducir la posible existencia de regularidades observables y considerar la existencia de procedimientos alternativos.

Generador (1,1)

Las sumas más simples serían las siguientes[16]:

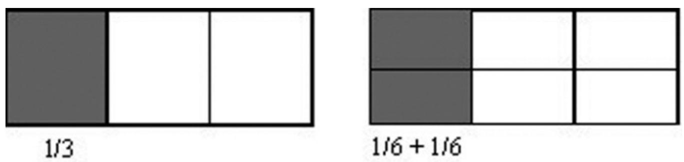
$$\underline{2}+\underline{2}=1 \qquad \underline{4}+\underline{4}=\underline{2} \qquad \underline{6}+\underline{6}=\underline{3}$$

$$\underline{8} + \underline{8} = \underline{4} \qquad \underline{10} + \underline{10} = \underline{5} \qquad \underline{3} + \underline{3} = \tfrac{2}{3}$$

cuyos cinco primeros casos se resumirían en una regla simple:

La suma de dos fracciones iguales de denominador par es igual a una fracción cuyo denominador es la mitad del denominador de las primeras.

A estos resultados se puede llegar por dos caminos: por vía empírica o por aplicación implícita de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. En el primer caso bastará considerar una misma figura (que actúa como unidad) dividida de dos modos diferentes, por ejemplo en tres o seis partes iguales de las que se escogen una o dos partes respectivamente. La comparación permite observar, de manera empírica, la igualdad en los resultados de ambas operaciones.



Otra forma de deducir la misma equivalencia consistiría, expresado informalmente, en partir de la igualdad más elemental

$$\underline{2} + \underline{2} = 1$$

y suponer que si dos cosas son iguales, sus mitades son iguales entre sí. Ahora bien, la mitad de 1 es $\underline{2}$ y la mitad de la suma del miembro de la izquierda se obtendría por aplicación (siquiera implícita) de la propiedad distributiva: La mitad de la suma de dos cosas es la suma de sus mitades, de modo que la mitad de $\underline{2} + \underline{2}$ sería $\underline{4} + \underline{4}$. Lo mismo sucedería con la tercera, la cuarta o la quinta parte, dando lugar en cada caso a una de las sumas consideradas como elementales.

Del generador (1,1 ,1) al (1,2)

Consideremos ahora una nueva suma básica que aparece en el Rollo de cuero:

$$\underline{6} + \underline{6} + \underline{6}$$

aplicando un resultado anterior sería igual a

$$(\underline{6} + \underline{6}) + \underline{6} = \underline{3} + \underline{6} = \underline{2}$$

Que $\underline{6}$ repetido tres veces sea igual a $\underline{2}$ finalmente sólo puede alcanzarse por una comparación empírica como la que hemos planteado antes sea, como en la figura anterior, con una apoyatura visual o por medios estrictamente numéricos ligados a la proporcionalidad: Tres partes respecto de seis es equivalente a una parte respecto de dos en que está dividida la unidad.

A partir del resultado anterior

$$\underline{3} + \underline{6} = \underline{2}$$

se pueden alcanzar otros resultados asociados al generador (1 , 2) como son los siguientes:

$$\underline{12} + \underline{12} + \underline{12} = (\underline{12} + \underline{12}) + \underline{12} = \underline{6} + \underline{12} = \underline{4}$$
$$\underline{18} + \underline{18} + \underline{18} = (\underline{18} + \underline{18}) + \underline{18} = \underline{9} + \underline{18} = \underline{6}$$

donde el primero expresa la equivalencia ‘Tres partes de Doce es equivalente a Una parte de Cuatro’ y el segundo ‘Tres partes de Dieciocho es equivalente a Una parte de Seis’. Un procedimiento alternativo sería nuevamente la aplicación de la propiedad distributiva de manera que, a partir de la primera suma de fracciones, se alcanzaran las otras dos calculando la mitad o la tercera parte de la primera.

En todo caso, sería formulable de nuevo una regla[17] (la conocida como regla G de Gillings):

> *Cuando se suman dos fracciones de manera que el denominador de una sea el doble que el de la otra, el resultado es una fracción que tiene por denominador el mayor de los dos primeros dividido por tres.*

<u>Del generador (1,1,1,1) al (1,3)</u>

Consideremos la suma de fracciones

$$\underline{12} + \underline{12} + \underline{12} + \underline{12}$$

que se puede agrupar de dos maneras diferentes dando lugar a procedimientos distintos. El primero consistiría en aplicar la proporcionalidad numérica de manera que ‘Cuatro partes de Doce es equivalente a Una parte de Tres’ de manera que se llegara a la expresión

$$(\underline{12} + \underline{12} + \underline{12}) + \underline{12} = \underline{4} + \underline{12} = \underline{3}$$

pero que el resultado de este agrupamiento ($\underline{4} + \underline{12}$) sea $\underline{3}$ puede alcanzarse utilizando resultados anteriores directamente y agrupando las fracciones originales por parejas:

$$(\underline{12} + \underline{12}) + (\underline{12} + \underline{12}) = \underline{6} + \underline{6} = \underline{3}$$

Idéntico planteamiento sería el correspondiente a una de las sumas del papiro Rhind:

$$\underline{24} + \underline{24} + \underline{24} + \underline{24} = \underline{8} + \underline{24} = \underline{6}$$

Sin embargo, conviene tener en cuenta un procedimiento poco probable que permitiese de una manera distinta alcanzar el primer resultado. Consistiría en partir de la igualdad

$$\underline{3} + \underline{3} = \tfrac{2}{3}$$

desagrupando y agrupando los sumandos:

$$\underline{3} + \underline{3} = (\underline{6} + \underline{6}) + \underline{3} = \underline{6} + (\underline{6} + \underline{3}) = \underline{6} + \underline{2} = \tfrac{2}{3}$$

de manera que hallando la mitad de ambos miembros de la última igualdad, se llegaría a

$$\underline{12} + \underline{4} = \underline{3}$$

En todo caso, la regla alcanzada podría expresarse así:

> *La suma de dos fracciones tales que el denominador de una sea tres veces mayor que el de la otra, es igual a una fracción cuyo denominador se obtiene dividiendo entre cuatro el mayor de los denominadores iniciales.*

Del generador (1,1,1,1,1) al (1,4)

De la misma manera que en los casos anteriores se hallarían los siguientes resultados que aparecen en el Rollo de cuero:

$$(\underline{20} + \underline{20}) + (\underline{20} + \underline{20}) + \underline{20} = \underline{10} + \underline{10} + \underline{20} =$$
$$= (\underline{10} + \underline{10}) + \underline{20} = \underline{5} + \underline{20} = \underline{4}$$
$$(\underline{40} + \underline{40}) + (\underline{40} + \underline{40}) + \underline{40} = \underline{20} + \underline{20} + \underline{40} =$$
$$= (\underline{20} + \underline{20}) + \underline{40} = \underline{10} + \underline{40} = \underline{8}$$

el segundo de los cuales puede alcanzarse a partir del primero considerando la mitad de éste. En todo caso, la regla subsiguiente sería

> *La suma de dos fracciones cuyos denominadores son tales que uno es cuatro veces mayor que el otro, es igual a una nueva fracción cuyo denominador se obtiene dividiendo por cinco el mayor de los denominadores originales*.

Del generador (1,1,1,1,1) al (2,3)

El papiro Rhind utiliza en algunos problemas la igualdad

$$\underline{10} + \underline{15} = \underline{6}$$

que no es reducible mediante un tratamiento simple de los números en juego a ninguno de los procedimientos anteriores. En efecto, cabe plantear la generación (1,1,1,1,1) $\rightarrow$ (2,3) del siguiente modo:

$$(\underline{30} + \underline{30} + \underline{30}) + (\underline{30} + \underline{30}) = \underline{10} + \underline{15} = \underline{6}$$

considerando que 'Cinco partes de Treinta es equivalente a Una parte de Seis'. Podemos observar sin embargo que al resultado no se llega por repetición de la fracción con denominador más pequeño sino que hay que escoger un denominador múltiplo de ambos y, en concreto, el más pequeño de los existentes. ¿Esto lleva a suponer que los egipcios tenían la noción de mínimo común múltiplo de dos números? Como se verá en el próximo capítulo es ésta una discusión difícil de resolver. Lo que sí parece comprobado es que el múltiplo más pequeño de dos números sí fue un número utilizado en diversos cálculos (en concreto, al considerar el empleo de los 'auxiliares rojos' que abordaremos más adelante) pero ello no quiere decir que la concepción de este número (el mínimo común múltiplo) sea plenamente matemática ni siquiera que tenga entidad por sí misma.

El escriba egipcio pudo llegar a utilizar este número mediante un tanteo aleatorio que pronto se pudo hacer sistemático por la formulación de una regla oportuna. Así, se puede buscar números hasta que encontrar que el 30 tiene una curiosa propiedad: Si le hallamos la décima parte y luego la quinceava parte, la suma de ambos resultados es igual a calcular la sexta parte de 30. Esquemáticamente:

$$\underline{10}\,(30) = 3 \qquad \underline{15}\,(30) = 2$$

$$\underline{10}\,(30) + \underline{15}\,(30) = 3 + 2 = 5$$

Pero como $\underline{6}\,(30) = 5$ se deduce que hallar una décima parte y luego una quinceava parte es lo mismo que calcular una sexta parte de una cantidad.

Del generador (1,1,1,1,1,1,1) al (1,2,4)

La agrupación por parejas de fracciones cuando el número total de éstas es impar ofrece ricas posibilidades de combinación, como sucede al calcular esta suma del Rollo de cuero:

$$(\underline{28} + \underline{28}) + (\underline{28} + \underline{28}) + (\underline{28} + \underline{28}) + \underline{28} =$$
$$= (\underline{14} + \underline{14}) + \underline{14} + \underline{28} = \underline{7} + \underline{14} + \underline{28} = \underline{4}$$

considerando de nuevo que ‘Siete partes de Ventiocho es equivalente a Una parte de Cuatro’.

El generador (2,3,6)

Es improbable (aunque posible) que los escribas egipcios escogiesen un generador formado por la suma de once fracciones iguales para agruparlas en una pareja, un trío y un sexteto, si se puede encontrar un procedimiento más simple. Este consistiría en utilizar resultados anteriores para desagrupar algunas de las fracciones presentes, como en un ejemplo que aparece en el papiro Rhind:

$$\underline{8} + \underline{8} = \underline{4} \;\rightarrow\; \underline{8} + \underline{12} + \underline{24} = \underline{4}$$

aplicando un resultado del generador (1,2). Pero estos procedimientos de desagrupamiento no debieron ser habituales dado que algunas sumas sencillas deducibles de esta forma y que podrían haber sido útiles no aparecen entre las más utilizadas por los escribas egipcios. Tal sería el caso similar al anterior de

$$\underline{6} + \underline{6} = \underline{3} \;\rightarrow\; \underline{6} + \underline{9} + \underline{18} = \underline{3}$$

u otros resultados que dieran paso a generadores que ni siquiera están contemplados en los documentos citados, como es el caso del generador (1,3,6):

$$\underline{3} + \underline{6} = \underline{2} \;\rightarrow\; \underline{3} + \underline{9} + \underline{18} = \underline{2}$$

Concluimos por tanto que, bajo los supuestos reseñados al principio, el escriba pudo construir estas sumas de fracciones mediante distintos procedimientos:

- Agrupando fracciones iguales con la utilización de resultados anteriores.
- Deduciendo unos resultados de otros a partir del cálculo distributivo de su mitad, tercera parte, etc.
- Por desagrupamiento de fracciones utilizando dichos resultados anteriores.
- Por aplicación de las dos partes de la igualdad a unas cantidades concretas relacionadas con el concepto actual de mínimo común múltiplo.

Es conveniente distinguir, a partir de lo visto, lo que supone el empleo de una propiedad matemática o el descubrimiento y utilización de una regularidad numérica observable. Una propiedad matemática como la distributiva es una relación abstracta (por cuanto se aplica a todos los números bajo determinadas condiciones) cuya naturaleza se apoya en las propias características aritméticas del conjunto considerado de números (en este caso los naturales). Otra cosa bien distinta es una regularidad observable como la que lleva a formular las reglas en cursiva que aparecen anteriormente: Cuando tiene lugar un suceso A y un suceso B siempre aparece un suceso C. Si se tiene una fracción con un determinado denominador (suceso A) y se suma a otra de denominador doble que el anterior (suceso B) el resultado es igual a una fracción con denominador la tercera parte del mayor de los denominadores anteriores (suceso C).

La diferencia entre 'propiedad matemática' y 'regularidad observable' es que de la primera se sigue 'necesariamente' y de modo deductivo la regla mientras que la regularidad sólo garantiza inductivamente que la regla se cumple para un conjunto limitado de datos examinados. Indudablemente la apreciación de la 'regularidad' puede ser un primer paso en Matemáticas para el descubrimiento de una 'propiedad' pero no tiene la misma naturaleza como práctica matemática.

Aplicaciones de la suma de fracciones

Algunos de los problemas iniciales del papiro Rhind presentan la multiplicación de diversas fracciones por el número 1 $\underline{2}$ $\underline{4}$, operación conveniente puesto que el cálculo acumulativo de una cantidad, su mitad y su cuarta parte aparecen a menudo sobre todo al tratar con cantidades de grano cuyas medidas de capacidad conocen este tipo de divisiones. Así pues, con un objetivo de practicar operaciones sencillas de este tipo, el escriba Ahmose realiza una serie de multiplicaciones donde se aplican sistemáticamente los resultados encontrados en el Rollo de cuero y que hemos tratado en el epígrafe anterior, labor que mostraremos a partir de algunos de los problemas tratados.

Rhind - Problema 12: Multiplicar $\underline{14}$ por 1 $\underline{2}$ $\underline{4}$

1 $\underline{14}$
2 $\underline{28}$
3 $\underline{56}$
----
1 $\underline{2}$ $\underline{4}$ $\underline{14}$ $\underline{28}$ $\underline{56}$ = $\underline{8}$

obtenida a partir del generador (1,2,4).

Una extensión del problema anterior lo constituye el

Rhind - Problema 14: Multiplicar $\underline{28}$ por 1 $\underline{2}$ $\underline{4}$

1 $\underline{28}$
$\underline{2}$ $\underline{56}$
$\underline{4}$ $\underline{112}$
----
1 $\underline{2}$ $\underline{4}$ $\underline{28}$ $\underline{56}$ $\underline{112}$ = $\underline{16}$

sin más que considerar la división por la mitad del problema anterior.

Rhind - Problema 9: Multiplicar $\underline{2} + \underline{14}$ por 1 $\underline{2}$ $\underline{4}$

	1 $\underline{2}$ $\underline{1}$
$\underline{2}$	$\underline{8}$ $\underline{56}$
$\underline{4}$	$\underline{16}$ $\underline{112}$
1 $\underline{2}$ $\underline{4}$	$\underline{2}$ $\underline{4}$ $\underline{8}$ $\underline{14}$ $\underline{28}$ $\underline{56}$

que, por el resultado encontrado en el problema 12, dará lugar a la expresión

$$\underline{2}\ \underline{4}\ \underline{8}\ (\underline{14}\ \underline{28}\ \underline{56}) = \underline{2}\ \underline{4}\ \underline{8}\ \underline{8} = \underline{2}\ \underline{4}\ \underline{4} = \underline{2}\ \underline{2} = 1$$

El siguiente problema parece una simple continuación de los anteriores por cuanto llegar al resultado supone, una vez más, hallar la mitad de los datos del problema 9. Sin embargo, junto a una resolución que podríamos denominar ortodoxa en dicho sentido, el escriba añade unos números en rojo (aquí resaltados en negrilla) que abren paso a nuevas formas de cálculo de sumas complejas de fracciones.

Rhind - Problema 7: Multiplicar $\underline{4}$ $\underline{28}$ por 1 $\underline{2}$ $\underline{4}$

1	$\underline{4}$ $\underline{28}$	**7** **1**
$\underline{2}$	$\underline{8}$ $\underline{56}$	**3** **$\underline{2}$** **$\underline{2}$**
$\underline{4}$	$\underline{16}$ $\underline{12}$	**1** **$\underline{2}$** **$\underline{4}$** **$\underline{4}$**

de forma que la suma de las fracciones de la columna central da lugar a la siguiente aplicación del problema 14:

$$\underline{4}\ \underline{8}\ \underline{16}\ (\underline{28}\ \underline{56}\ \underline{112}) = \underline{4}\ \underline{8}\ (\underline{16}\ \underline{16}) = \underline{4}\ (\underline{8}\ \underline{8}) = \underline{4}\ \underline{4} = \underline{2}$$

Ahora bien, si el procedimiento ya está establecido en los problemas expuestos anteriormente, ¿qué significan esos números en rojo? Su presencia se extiende a otros problemas, siempre en relación con sumas de un número crecido de fracciones y siempre acompañando a la expresión habitual de las mismas. De ahí que se hayan conocido como 'auxiliares rojos'.

Los números auxiliares rojos

Al analizar la formación del generador (2,3) se había propuesto un procedimiento alternativo a todos los anteriores que son fundamentalmente deductivos. En efecto, se planteaba que la suma

$$\underline{10} + \underline{15} = \underline{6}$$

se resolvía por medio del cálculo sobre 30 de cada uno de los miembros de la igualdad. Es decir,

$$\underline{10} \text{ de } 30 + \underline{15} \text{ de } 30 = 3 + 2 = 5 = \underline{6} \text{ de } 30$$

llegándose a una regla empírica que no es, sin embargo, aleatoria por cuanto el número escogido (30) tiene unas relaciones con las fracciones que permiten obtener resultados enteros en cada parte del cálculo. Pero esto no es imprescindible dado el dominio que tenían los escribas egipcios sobre el empleo de fracciones. El número al que aplicar las fracciones bastaría que diera lugar a números más grandes y fácilmente manipulables que las fracciones originales.

Este procedimiento propuesto deja de ser una especulación cuando se examina el problema 7 y se compara con el problema 10 del papiro que muestra la misma multiplicación.

Rhind - Problema 10: Multiplicar $\underline{4}$ $\underline{28}$ por 1 $\underline{2}$ $\underline{4}$

		1 $\underline{4}$ $\underline{28}$
$\underline{2}$	$\underline{7}$	
$\underline{4}$	$\underline{14}$	
1 $\underline{2}$ $\underline{4}$		$\underline{4}$ $\underline{7}$ $\underline{14}$ $\underline{28}$ = $\underline{2}$

Ahora podemos trazar el cuadro completo. Los auxiliares rojos del problema 7 tienen el mismo significado que en el caso del generador (2,3) escogiendo en este caso como número al que aplicar las fracciones el 28, uno intermedio entre los denominadores 4 (el menor) y 112 (el mayor) de los que estarán en juego.

$$\underline{4} \text{ de } 28 + \underline{28} \text{ de } 28 = 7 + 1$$
$$\underline{8} \text{ de } 28 + \underline{56} \text{ de } 28 = (3 + \underline{2}) + \underline{2}$$
$$\underline{16} \text{ de } 28 + \underline{112} \text{ de } 28 = (1 + \underline{2} + \underline{4}) + \underline{4}$$

de modo que, sumando ambos miembros resultaría que

$$\underline{4} \text{ de } 28 + \underline{8} \text{ de } 28 + \underline{16} \text{ de } 28 + \underline{28} \text{ de } 28 + \underline{56} \text{ de } 28 + \underline{112} \text{ de } 28 =$$
$$= (7 + 1 + 3 + 1) + (\underline{2} + \underline{2} + \underline{2} + \underline{4} + \underline{4}) = 14$$

o, en otras palabras,

$$(\underline{4} + \underline{8} + \underline{16} + \underline{28} + \underline{56} + \underline{112}) \text{ de } 28 =$$
$$= 14 = \underline{2} \text{ de } 28$$

luego

$$\underline{4} + \underline{8} + \underline{16} + \underline{28} + \underline{56} + \underline{112} = \underline{2}$$

Al comparar la realización de los problemas 7 y 10, se puede observar que los pasos intermedios en estos cálculos son aprovechados para hallar expresiones distintas de las sumas de fracciones implicadas, al modo en que las hallamos para el generador (2,3). En efecto,

$$\underline{8} \text{ de } 28 + \underline{56} \text{ de } 28 = (3 + \underline{2}) + \underline{2} =$$

$= 4 = \underline{7}$ de 28

luego: $\underline{8} + \underline{56} = \underline{7}$

y $\underline{16}$ de 28 + $\underline{112}$ de 28 = $(1 + \underline{2} + \underline{4}) + \underline{4}$ =
= 2 = $\underline{14}$ de 28

de donde: $\underline{16} + \underline{112} = \underline{14}$

Los números auxiliares rojos se encuentran en situaciones bien distintas pero siempre implicados en la suma de varias fracciones. En concreto aparecen auxiliando el cálculo en un conjunto de problemas denominados habitualmente de ‘completar un número’ por cuando suponen la realización de restas interpretadas como ‘completar’ el sustraendo hasta alcanzar el minuendo.

Rhind - Problema 21: “Te dicen: Completa ⅔ $\underline{15}$ hasta 1.
10 1
El total es 11 y el resto es 4. Multiplicar 15 para encontrar 4.

	1 15	
$\underline{10}$	1 $\underline{2}$	
$\underline{5}$	3	✓
$\underline{15}$	1	✓
Total:	4".	

El texto completo del problema (excepto una demostración posterior) aclara todo el procedimiento seguido por el escriba. En efecto, empieza por considerar el mayor de los denominadores del sustraendo (15) de manera que

⅔ de 15 + $\underline{15}$ de 15 = 10 + 1 = 11

pero como al aplicar el minuendo, 1 de 15 = 15 , ello quiere decir que hay que añadir 4 a la suma anterior para obtener lo correspondiente al minuendo. De manera que busca

□ de 15 = 4

multiplicando 15 para encontrar 4, tal como dice en el texto del problema. La solución es, por tanto,

$\underline{5} + \underline{15}$

La aplicación de los auxiliares rojos se complica cuando la relación entre los denominadores no es entera pero ello lo único que puede generar, escogiendo el mayor denominador, es un conjunto de fracciones más simples que las originales, como en

Rhind - Problema 23: “Completa
$\underline{4}$ $\underline{8}$ $\underline{10}$ $\underline{30}$ $\underline{45}$ hasta ⅔ “.

La resolución muestra los siguientes auxiliares rojos bajo los símbolos del sustraendo:

$\underline{4}$	$\underline{8}$	$\underline{10}$	$\underline{30}$	$\underline{45}$
11 $\underline{4}$	**5 $\underline{2}$ $\underline{8}$**	**4 $\underline{2}$**	**1 $\underline{2}$**	**1**

Pues bien, tomando como número de referencia el mayor denominador (45) resulta que los números rojos corresponden a la aplicación de las fracciones originales a dicho denominador, de modo que el planteamiento completo del problema podría escribirse así

$\underline{4}$	$\underline{8}$	$\underline{10}$	$\underline{30}$	$\underline{45}$	□	=	2/3
11 $\underline{4}$	**5 $\underline{2}$ $\underline{8}$**	**4 $\underline{2}$**	**1 $\underline{2}$**	**1**	**6 $\underline{8}$**		**30**

lo que permite concluir que

□ de 45 = 6 $\underline{8}$

de donde se multiplica con 45 hasta obtener 6 $\underline{8}$ llegando a la solución $\underline{9}$ $\underline{40}$.

A lo largo de los próximos capítulos podremos encontrar algunas otras aplicaciones de estos números auxiliares rojos a la realización de sumas complejas de fracciones. Naturalmente, este procedimiento ha dado lugar a considerar que los escribas egipcios disponían de un 'mínimo común múltiplo' algo primitivo. Lo importante, en todo caso, no es qué concepto interpretamos actualmente que se está utilizando sino en qué condiciones, con qué medios y para qué objetivos los escribas egipcios utilizaron los auxiliares rojos. Es indudable que se buscaba el mayor denominador respecto del cual expresar todos los demás, lo cual crea el método complejo de trabajar en dos niveles paralelos: El de los números negros que supone tomar como unidad aquélla respecto a la cual se consideran las fracciones originales del problema, y los números rojos que consideran como unidad otra más conveniente respecto a la cual expresar todas las fracciones anteriores. En ocasiones se considera el denominador mayor pero no siempre. El escriba buscaba la simplicidad de los números rojos por lo que no le importaba trabajar entre ellos con fracciones, siempre que fueran sencillas de manejar (obsérvese a ese respecto que los números rojos siempre incluyen como fracciones potencias de dos). Había posiblemente un procedimiento usual consistente en escoger el mayor denominador pero la flexibilidad numérica del escriba le permitía tomar en consideración otro número de referencia. En todo caso, la habilidad numérica del egipcio se demuestra en el problema 36 del papiro Rhind, donde se hace necesario sumar un total de 16 fracciones que aquí se muestran en cuatro filas:

$\underline{53}$	$\underline{106}$	$\underline{212}$			
20	**10**	**5**	**35**		
$\underline{30}$	$\underline{318}$	$\underline{795}$	$\underline{53}$	$\underline{106}$	
35 $\underline{3}$	**3 $\underline{3}$**	**1 $\underline{3}$**	**20**	**10**	**70**
$\underline{12}$	$\underline{159}$	$\underline{318}$	$\underline{636}$		
88 $\underline{3}$	**6 ⅔**	**3 $\underline{3}$**	**1 ⅔**	**100**	
$\underline{20}$	$\underline{265}$	$\underline{530}$	$\underline{1060}$		
53	**4**	**2**	**1**	**60**	

Total: 265

y como 265 = 4 de 1060, cantidad que ha sido tomada como nueva unidad en el empleo de los auxiliares rojos, la suma de todas estas fracciones será igual a 4.

Notas

1 Posener-Kiréger, P. y De Cenival, J.L. (1968): “Hieratic Papyri tn the British Museum. Te Abu Sir Papyri”.
2 Kemp, B.J. (1996): “El antiguo Egipto. Anatomía de una civilización”.
3 Posener-Kiréger, P. (1979): “Les papyrus d’Abousir et l’economie des temples funéraires de l’Ancient Empire”.
4 Ibidem.
5 Kemp, B.J. Op. cit.
6 Pernigotti, S. (1991): “El sacerdote”.
7 Warburton, D. (1997): “State and economy in Ancient Egypt”, pp. 201-202.
8 Menu, B. (1982): “Recherches sur l’histoire juridique, economique et sociale de l’Ancienne Egypte”.
9 Ibid, pp. 180-181.
10 Ibidem.
11 Caveing, M. (1994): “Essai sur le savoir mathématique”.

12 Caveing, M. (1992): “Le statut arithmétique du quantieme égyptien”.
13 Glanville, S.R.K. (1927): “The mathematical leather roll in the British Museum”.
14 Gillings, R.J. (1972): “Mathematics in the time of faraon”.
15 Ibid, pp. 95-99.
16 Van der Waerden. Cit. por Caveing, M. (1994). Op. cit.
17 Gillings, R.J. (1972). Op. cit.

Capítulo 8
El Recto del papiro Rhind

El reparto de raciones

El modelo redistributivo de la economía egipcia incluía como uno de sus elementos fundamentales la percepción por los trabajadores egipcios de una compensación por su trabajo, un conjunto de mercancías que le permitían la subsistencia a él y a su familia e incluso, en el caso de los puestos más importantes, un sobrante que pudiera ser objeto de transacciones posteriores. Dado que es la Administración egipcia la que, en los momentos de gobierno centralizado y fuerte del faraón, debe distribuir estas mercancías, los testimonios que han llegado en este sentido provienen de fuentes contables propias de la Administración.

Los ostraca encontrados en Deir el Medineh, por ejemplo, muestran un sistema de distribución de raciones entre los trabajadores de las tumbas reales agrupados en este poblado.

Su percepción no estaba exenta de irregularidades ocasionales como muestra una ‘rebelión’ registrada de los artesanos y trabajadores frente al faraón al no recibir sus raciones durante largo tiempo. Sin embargo, las raciones se recibían provenientes de los visires o los guardianes del Tesoro del faraón, sea directamente o por medio de envíos del Granero de Tebas[1]. Diversas instituciones parecen haber colaborado en este suministro, como vimos que sucedía en el templo de Neferirkare-Kakai examinado en el capítulo anterior, lo que presta una gran complejidad al examen de los circuitos económicos que se establecían localmente dentro del modelo redistributivo.

En todo caso, los testimonios de la época rebelan que las raciones eran enviadas bajo la forma más habitual de productos de alimentación: panes de distintas clases, cervezas variadas, carne, vegetales, pescado, madera y otras mercancías minoritarias. El envío se registra completo pero la distribución de las raciones era desigual. El ostraca Cairo 25608 (hacia la mitad de la dinastía XX), por ejemplo, muestra[2] que el jefe recibía un total de 7 ½ khar mientras que la mayoría de los trabajadores conseguían 5 ½ khar, el guardián de la puerta 1 ½ y así con otros casos. Ello obligaba a realizar cálculos de reparto desigual del que nos ocuparemos ampliamente en el siguiente capítulo. Ahora trataremos del reparto igualitario del que, por su facilidad de realización para el escriba egipcio, se tienen menos testimonios contables.

Por ejemplo, el papiro Bulaq 18[3] menciona las raciones recibidas por un grupo de funcionarios durante el Imperio Medio: El jefe se llevaba 20 panes, una medida de cerveza y 10 porciones de carne. Su siguiente recibía la mitad del anterior excepto en la medida de cerveza, que conservaba. A continuación se menciona una donación colectiva de 260 panes, 20 medidas de cerveza y 1010 porciones de carne para un conjunto de soldados.

Supongamos que estos soldados alcanzaran un número de 48. Dado que todos tendrían las mismas raciones, la tarea del escriba consistiría en repartir estas raciones en 48 partes iguales, es decir, lo que nosotros entendemos por dividir. Habitualmente el papiro Rhind no menciona la palabra ‘dividir’ ni siquiera ‘repartir’, aunque ésta es más frecuente, sino que utiliza la expresión ‘contar con d para obtener D’ siendo D el que nosotros denominamos dividendo y d el llamado divisor. De esta manera, la operación que se plantea cuando se necesita dividir, como se mencionó en el capítulo 6, es interpretada como una multiplicación a la que le falta uno de los factores, es decir,

$$D : d = \square$$

es interpretado como

$$d \times \square = D$$

En este sentido, la tarea del escriba en el problema planteado consistiría en dividir 260 panes, 20 medidas de cerveza y 1010 porciones de carne entre 48 soldados o, en otras palabras, ‘contar con 48 hasta alcanzar’ 260, 20 y 1010 respectivamente. Ello se resolvería a través de la multiplicación de 48 por diversos números hasta conseguir sumar estas cantidades. Para el caso de las porciones de carne, por ejemplo,

$\underline{24}$	2	
$\underline{16}$	3	
$\underline{12}$	4	✓
$\underline{8}$	6	

$\underline{4}$	12	✓
$\underline{2}$	24	✓
1	48	
2	96	
4	192	✓
8	384	
16	768	✓
1010	16 + 4 + $\underline{2}$ + $\underline{4}$ + $\underline{12}$ =	
	= 20 $\underline{2}$ $\underline{3}$	

Con la construcción de esta tabla de correspondencias se llega a la conclusión de que junto a 20 $\underline{2}$ $\underline{3}$ porciones de carne por soldado, cada uno se llevaría 5 $\underline{4}$ $\underline{6}$ panes y $\underline{4}$ $\underline{6}$ de una medida de cerveza.

Sin embargo, frente a este procedimiento que, una vez automatizado, se revela de una gran sencillez y para el que no hace falta memorización alguna de los resultados parciales (como en nuestras actuales multiplicaciones y divisiones), se levanta algún inconveniente que lo torna claramente problemático.

En el papiro Rhind se ofrece inicialmente en su cara trasera (el Verso) una tabla de divisiones de los primeros nueve números entre diez. Aunque nos veremos obligados a revisar estas operaciones más adelante, vamos a considerar una de ellas de las que se ofrece el resultado pero no demostración alguna de su validez (como lo hace el escriba con otras de estas divisiones). Es el caso de

3 dividido entre 10 = $\underline{5}$ $\underline{10}$

Su comprobación consistiría en realizar la siguiente multiplicación comprobando su resultado:

10 x $\underline{5}$ $\underline{10}$ = 3

para lo cual el escriba repetiría diez veces la suma de fracciones propuesta:

1	$\underline{5}$ $\underline{10}$	
2	2/5 $\underline{5}$	✓
4	4/5 2/5	
8	1 3/5 4/5	✓
10	1 4/5 3/5 2/5 $\underline{5}$ = 3	

Naturalmente el escriba no podría hacerlo de esta forma, manejando fracciones no unitarias. La cuestión que inmediatamente se plantea en la división característica del reparto de raciones y, en general, en toda multiplicación donde aparezca implicada la repetición de fracciones unitarias, es que el método de duplicación egipcio es fácil de aplicar en estas fracciones cuando el denominador es par, ya que

$\underline{2}$	$\underline{4\ n}$
1	$\underline{\mathbf{2n}}$

2 n

como en el caso

2 16
1 8
2 4

pero la sencillez del método seguido (en concreto el de dividir por la mitad el denominador) no se puede repetir si este denominador es impar, como en el reparto anterior de 3 en diez partes iguales. La fracción no se puede duplicar con facilidad pues hay que encontrar una expresión en forma de suma de fracciones unitarias para 2/5 que no es inmediata.

De manera que, dado que este cálculo no es sencillo, el escriba deberá disponer de una tabla de expresiones para las que conocemos como fracciones 2 / 2n+1 siendo, por tanto, el denominador impar. Esa tabla existe y está escrita en la cara anterior del papiro Rhind (Recto) ocupando toda su extensión. Su complejidad es considerable y, gracias a ello precisamente, revela muchos de los métodos seguidos por distintas generaciones de escribas egipcios en el tratamiento de fracciones unitarias y, en concreto, en la construcción de expresiones sencillas de manejar para cada una de las fracciones 2 / 2n+1. El Recto muestra estas descomposiciones desde el ⅔ hasta el 2/101.

2/n	Fracciones	2/n	Fracciones	2/n	Fracciones	2/n	Fracciones
3	2/3	29	24 58 174 232	55	30 330	81	54 162
5	3 15	31	20 124 155	57	38 114	83	60 332 415 498
7	4 28	33	22 66	59	36 236 531	85	51 255
9	6 18	35	30 42	61	40 244 488 610	87	58 174
11	6 66	37	24 111 296	63	42 126	89	60 356 534 890
13	8 52 104	39	26 78	65	39 195	91	70 130
15	10 30	41	24 246 328	67	40 335 536	93	62 186
17	12 51 68	43	42 86 129 301	69	46 138	95	60 380 570
19	12 76 114	45	30 90	71	40 568 710	97	56 679 776
21	14 42	47	30 141 470	73	60 219 292 365	99	66 198
23	12 276	49	28 196	75	50 150	101	101 202 303 606
25	15 75	51	34 102	77	44 308		
27	18 54	53	30 318 795	79	60 237 316 790		

El examen de estas descomposiciones ha adolecido hasta recientemente de dos limitaciones. Algunos autores prestigiosos como Gillings buscaron ante todo regularidades observables. De esta forma utilizó un programa de ordenador para encontrar todas las posibles descomposiciones de cada fracción 2/n (con n impar), a partir de las que dedujo la existencia de unas reglas de formación de estas descomposiciones. Es obvio, sin embargo, que el escriba egipcio no tuvo ante sus ojos todas estas posibles descomposiciones al objeto de elegir las más convenientes por medio de una utilización de reglas previas. En este caso, el método escogido por Gillings, aunque ilumine una parte de los hechos, limita de manera importante el resultado de su indagación. Otros autores han buscado un tratamiento 'actualizado' que se concreta en encontrar fórmulas que llegan a ser simbólicamente complejas para justificar grupos de estas descomposiciones bajo el supuesto, algunas veces explícito, de que debe existir una sola fórmula que explique todas las descomposiciones realizadas por el escriba.

Estos enfoques adolecen de anacronismo. El estudio que se ofrece a lo largo de este capítulo considerará, en primer lugar, que estos resultados sólo pudieron alcanzarse mediante los procedimientos y operaciones sobre fracciones que se han analizado en el capítulo anterior por estar aparentemente al alcance de los escribas de la época. En segundo lugar, nuestro análisis no tiene por objetivo resaltar las regularidades salvo en la medida en que muestren la construcción de estas descomposiciones por los escribas. En otras palabras, no nos va a interesar el producto acabado (los resultados del Recto), aunque siempre se consideren como referencia obligada, sino el proceso por el cual los escribas egipcios aplicaban sus procedimientos para generar estos resultados. En tercer lugar, partiremos de un supuesto no probado pero que, a la luz de los razonamientos que hagamos, será probable: El conjunto de descomposiciones en fracciones unitarias que aparecen en el Recto no son el fruto del trabajo de un solo escriba sino de varias generaciones de escribas. Ello sería coherente con el hecho de que el papiro Rhind es un documento que recoge, tal como afirma, resultados matemáticos de varias generaciones anteriores. Pues bien, la escritura del Recto es el resultado tangible de las aportaciones de escribas de varias generaciones, cada una de las cuales aportó sucesivos perfeccionamientos a las descomposiciones deseadas, nuevos procedimientos de cálculo, estrategias diferentes para hallar los resultados que luego Ahmose escribió en el papiro. De ahí que pueda llegarse por distintos caminos a algunos de estos resultados siendo difícil en ocasiones averiguar cuál sea el que debió predominar o el anterior temporalmente.

Sin embargo, antes de realizar esta reconstrucción aproximativa de la génesis del Recto, e incluso constituyendo un primer paso para la misma, es conveniente examinar la fracción más peculiar que consideraron los egipcios que, además, es el primer resultado que escriba Ahmose en la cara anterior del papiro: La fracción ⅔.

La fracción ⅔

La más importante excepción al empleo de fracciones unitarias por el escriba egipcio lo constituye la utilización frecuente de la fracción ⅔. Es cierto que otras fracciones como ¾ aparecen pero de manera infrecuente y tardía en la matemática egipcia.

Respecto a la mucho más frecuente fracción ⅔ es necesario aclarar una serie de cuestiones:

- ¿Qué significado le atribuye el matemático egipcio?
- ¿Por qué es frecuente su utilización en contraste con la escasa o nula frecuencia de otras similares (3/4 , 4/5 , etc.)?
- ¿Por qué el cálculo de $\underline{3}$ de una cantidad aparece a menudo asociado al cálculo previo de ⅔ de dicha cantidad? ¿Por qué el escriba no halla $\underline{3}$ directamente?.

Su utilización frecuente en los cálculos matemáticos se debe precisamente al significado que el escriba asigna a esta fracción. En efecto, ⅔ es la fracción correspondiente al inverso de 1 $\underline{2}$ siendo este último un número mixto considerablemente frecuente en todo tipo de cálculos como lo acabamos de comprobar en el epígrafe anterior. Es decir,

$$⅔ \times 1\ \underline{2} = 1$$

de manera que si se plantea el problema de repartir 9 hekat de grano, por ejemplo, dando 1 hekat a cada trabajador, el número de trabajadores puede calcularse sin más que

$$1\ \underline{2}\ \times \square = 9 \rightarrow \tfrac{2}{3} \text{ de } 9 = \square \rightarrow \square = 6 \text{ trabajadores}$$

La importancia, pues, de la fracción ⅔ es fundamentalmente operativa dado su significado de fracción inversa de la cantidad 1 $\underline{2}$, de uso abundante en los cálculos del escriba. Este hecho viene además corroborado por la propia representación jeroglífica de la fracción (capítulo 7): Una ‘boca’ bajo la cual se dibujan dos palos desiguales que pueden estar representando a la unidad (el más largo) y a su mitad (el más corto).

Pues bien, otra característica peculiar de esta fracción es que su cálculo suele preceder al de $\underline{3}$ de la cantidad de que se trate. Así, en el problema 38 del papiro Rhind se hace necesario hallar

1	320
2	?
3	

pero para conseguirlo el escriba calcula previamente los ⅔:

1	320
2/3	213 $\underline{3}$
$\underline{3}$	106 2/3

¿Por qué hace esto? ¿No era al menos de la misma complejidad dividir directamente 320 en tres partes escogiendo una? Todo indica que el escriba es perfectamente capaz de calcular $\underline{3}$ de una cantidad cuando le interesa. Así, en el mismo cálculo llega al punto de que

2	320
2/3	213 $\underline{3}$
$\underline{3}$	106 2/3
6	53 $\underline{3}$
$\underline{11}$	29 $\underline{11}$
$\underline{22}$	14 $\underline{2}$ $\underline{22}$
$\underline{66}$	?

cuando tiene que calcular $\underline{66}$ recurre directamente a hallar la tercera parte de $\underline{22}$ sin inclinarse esta vez por calcular previamente los ⅔ de $\underline{22}$. Así llega a la respuesta nada sencilla de

$\underline{66}$	4 2/3 $\underline{6}$ $\underline{66}$

El cálculo directo de $\underline{3}$ se encuentra en otros problemas de manera explícita. Tal es el caso del problema 35 del papiro Rhind, donde se construye

1	$\underline{5}$ $\underline{10}$
2	$\underline{2}$ $\underline{10}$
$\underline{3}$	$\underline{10}$

o bien en el problema 37 del mismo papiro, donde se llega al extremo de hallar $\underline{9}$ por el procedimiento de calcular la tercera parte de la tercera parte:

1	$\underline{4}$ $\underline{32}$
2	$\underline{2}$ $\underline{16}$
$\underline{3}$	$\underline{12}$ $\underline{96}$
$\underline{3}$ de $\underline{3}$	$\underline{36}$ $\underline{288}$
$\underline{9}$	$\underline{36}$ $\underline{288}$

Así pues, el escriba es perfectamente capaz de hallar la tercera parte de una cantidad. A partir de este hecho constatado vuelve a plantearse la cuestión: Si es capaz de hallar $\underline{3}$ directamente, ¿por qué en ocasiones halla ⅔ antes de $\underline{3}$? La respuesta se centra en dos motivos:

- El cálculo de ⅔ de la cantidad siempre es de interés por el hecho ya comentado de ser la fracción inversa de 1 y, por tanto, ser factible de utilización posterior dentro del mismo problema (particularmente si hay que comprobar la bondad del resultado realizando la operación inversa).
- Hallar ⅔ de una cantidad debe ser, al menos, de la misma dificultad operativa que hallar $\underline{3}$ de dicha cantidad. Si es así, tanto daría calcular una parte que otra y una ($\underline{3}$) siempre se puede deducir de la otra (⅔).

De modo que, tras el primer motivo, la importancia de ⅔ va a girar en torno a su facilidad de cálculo. Veamos este argumento.

¿Es fácil de calcular? La posible dificultad en el cálculo de ⅔ es menor cuando se trata de cantidades enteras que puedan ser fácilmente descomponibles en múltiplos de tres. De esta forma

⅔ de 320 = ⅔ de (300 + 18 + 2) =
= ⅔ de 300 + ⅔ de 18 + ⅔ de 2 =
= 200 + 12 + 1 $\underline{3}$ = 213 $\underline{3}$

De hecho, es interesante observar que la gran mayoría de los cálculos previos de ⅔ antes que $\underline{3}$ en el papiro Rhind se efectúa al trabajar sobre cantidades mayores que la unidad. Por el contrario, cuando se tiene que hallar $\underline{3}$ de una cantidad fraccionaria es muy frecuente hacerlo directamente sin pasar por el ⅔ . Pero estas 'mayores frecuencias' no son reglas invariables, dado que se encuentran cálculos previos de ⅔ sobre cantidades fraccionarias (problemas 32 y 41 del papiro Rhind). Todo hace indicar que se buscaba, dada la importancia del ⅔ como inverso de 1 $\underline{2}$, que el escriba pudiera seguir cualquiera de los dos caminos aunque la aplicación fuera más fácil en unos casos que en otros. De hecho, este propósito dentro del tono general didáctico del papiro Rhind justifica la aparición de la única regla explícita de cálculo que incluye:

> "**Rhind - Problema 61B**: [Regla para] tomar ⅔ de una fracción desigual [es decir, la recíproca de un número impar]. Si te dicen '¿Cuál es ⅔ de 5 ?' tomas los recíprocos de 2 veces 5 y 6 veces 5. Tú haces lo mismo para hallar ⅔ del recíproco de cualquier número impar".

En nuestra terminología, la regla dada por el escriba afirma que de modo que, por ejemplo, en el caso de 6 :

La procedencia de esta regla se apoya en las sumas elementales que abordamos en el capítulo anterior. En efecto, partiendo de la más básica:

$$\underline{3} + \underline{3} = \tfrac{2}{3}$$

se podría expresar como

$$\underline{3} + (\underline{6} + \underline{6}) = \tfrac{2}{3}$$

que, agrupándola convenientemente, resulta en

$$(\underline{3} + \underline{6}) + \underline{6} = \underline{2} + \underline{6} = \tfrac{2}{3}$$

Visto su origen debemos enfrentarnos a su facilidad operativa. Hallar la mitad y la sexta parte de una cantidad ¿es más sencillo que hallar directamente la tercera parte? No parece que sea así por cuanto el cálculo de la sexta parte implica hallar previamente la tercera parte y dividirla por dos. Sin embargo, cuando se trata de calcular los ⅔ de fracciones la regla puede aplicarse de forma automática. De hecho un problema del papiro Rhind se dedica a practicar este tipo de operaciones:

“**Rhind - Problema 61**:

⅔ de ⅔ es $\underline{3}\ \underline{9}$
$\underline{3}$ de ⅔ es $\underline{6}\ \underline{18}$
⅔ de $\underline{3}$ es $\underline{6}\ \underline{18}$
⅔ de $\underline{6}$ es $\underline{12}\ \underline{36}$
⅔ de $\underline{2}$ es $\underline{3}$
$\underline{3}$ de $\underline{2}$ es $\underline{6}$
$\underline{6}$ de $\underline{2}$ es $\underline{12}$
$\underline{12}$ de $\underline{2}$ es $\underline{24}$
.......”

Todas estas operaciones parecen cálculos con ⅔ destinados a practicar la regla 61B que se ha mencionado antes y la secuencia por la que se halla primero los ⅔ de una fracción y luego la fracción $\underline{3}$ a continuación.

El cálculo de ⅔ se hace, sin embargo, complejo cuando se aplica a cantidades fraccionarias. En ese caso, desde luego, se puede aplicar la regla 61B cuya práctica parece constituir la intención del problema 61 anterior, pero hay autores que sostienen que el escriba dispondría también de tablas de cálculo de los ⅔ de sucesivas fracciones. En concreto, Gillings[4] realiza una interesante reconstrucción del proceso de confección de dichas tablas que se apoya en el hecho de que ⅔ es la cantidad inversa de 1 $\underline{2}$. En efecto, se puede comenzar por realizar una sencilla tabla de resultados hallando el 1 $\underline{2}$ de cantidades enteras:

1 $\underline{2}$ de 1 = 1 $\underline{2}$
1 $\underline{2}$ de 2 = 3

1 2 de 3 = 4 2
1 2 de 4 = 6
1 2 de 5 = 7 2
1 2 de 6 = 9
....

Como 1 2 de N = A entonces ⅔ de A = N , de donde
⅔ de 1 2 = 1
⅔ de 3 = 2
⅔ de 4 2 = 3
⅔ de 6 = 4
⅔ de 7 2 = 5
⅔ de 9 = 6

Ahora bien, cada dos términos a los que se aplica ⅔ están separados por 1 2 de manera que cabe interpolar otros dos separados por entre sí:

⅔ de 2 = 3
⅔ de 1 = ⅔
⅔ de 1 2 = 1
⅔ de 2 = 1 3
⅔ de 2 2 = 1 ⅔
⅔ de 3 = 2
⅔ de 3 2 = 2 3
⅔ de 4 = 2 ⅔
⅔ de 4 2 = 3
⅔ de 5 = 3 3
⅔ de 5 2 = 3 ⅔
⅔ de 6 = 4
⅔ de 6 2 = 4 3
⅔ de 7 = 4 ⅔
⅔ de 7 2 = 5
....

A partir de la primera interpolación:

⅔ de 2 = 3
⅔ de 1 = ⅔

se pueden añadir extensiones mediante división sucesiva por la mitad tal como se observa al final del problema 61:

⅔ de 1 = ⅔
⅔ de 2 = 3
⅔ de 4 = 6
⅔ de 8 = 12
⅔ de 16 = 24
....

que incluso puede resumirse en la regla:

> *Los ⅔ de una fracción de denominador par es igual a una fracción que tiene por denominador vez y media el denominador original.*

Provisto de estas tablas y con la regla anterior para fracciones específicas el escriba estaba preparado para el cálculo de los ⅔ de cualquier cantidad como se muestra en esta selección de problemas destinados a la práctica sucesiva de ⅔ y de una cantidad y en los que se aplican también resultados del Rollo de cuero:

"**Rhind - Problema 16**: [Multiplicar $\underline{2}$ por 1 ⅔ $\underline{3}$]"

$$\begin{array}{ll} 1 & \underline{2} \\ 2/3 & \underline{3} \\ & \mathbf{3}\ \underline{6} \end{array}$$

$\underline{2} + \underline{3} + \underline{6} = \underline{2} + \underline{2} = 1$

"**Rhind - Problema 8**: [Multiplicar $\underline{4}$ por 1 ⅔ $\underline{3}$]"

$$\begin{array}{ll} 1 & \underline{4} \\ 2/3 & \underline{6} \\ \underline{3} & \underline{12} \end{array}$$

$\underline{4} + \underline{6} + \underline{12} = \underline{4} + \underline{4} = \underline{2}$

"**Rhind - Problema 17**: [Multiplicar $\underline{3}$ por 1 ⅔ $\underline{3}$]"

$$\begin{array}{ll} 1 & \underline{3} \\ 2/3 & \underline{6}\ \underline{18} \\ \underline{3} & \underline{12}\ \underline{36} = \underline{9} \end{array}$$

$\underline{3} + \underline{6} + \underline{9} + \underline{18} = \underline{3} + \underline{3} = 2/3$

El reparto y las familias de fracciones

Analizando las peculiaridades de esta fracción ⅔ se ha llegado a la expresión

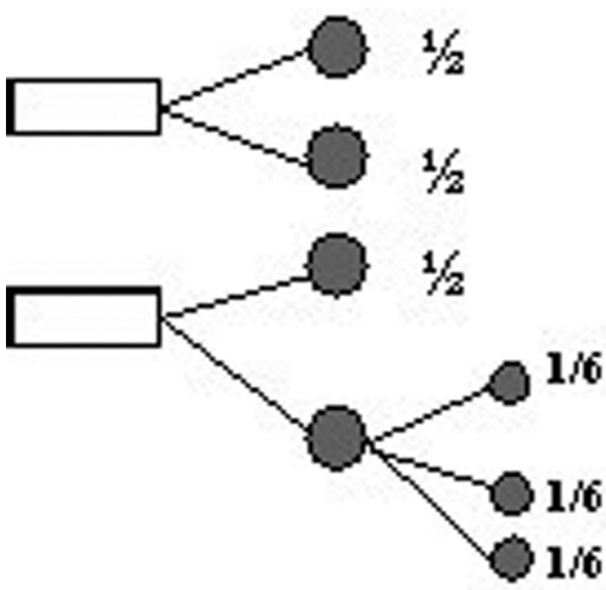
que tiene gran importancia en la explicación de diversos resultados del Recto. Pero antes de ello, sin embargo, vamos a estudiar una manera distinta de llegar a esta descomposición de la fracción ⅔ que encierra tres puntos de interés: Por un lado mostrará un procedimiento basado en la práctica del reparto, por otro nos hará considerar la fracción unitaria egipcia bajo otra concepción diferente a la hasta ahora contemplada y, por último, permitirá extender el procedimiento a otros resultados del Recto explicando su posible origen.

Consideremos para ello que el escriba tiene que realizar uno de estos repartos de raciones que se han mencionado al principio del capítulo. En esta ocasión debe repartir dos panes entre tres trabajadores[5]. La primera acción que podría realizar sería dividir cada pan en dos mitades lo que daría lugar a entregar ½ pan a cada uno sobrando uno de estos trozos. Pues bien, este medio pan lo divide a su vez en tres partes iguales dando una de estas partes a cada trabajador (es decir, 1/3 de ½ = 1/6 del pan original) llegándose a la conclusión de que cada hombre ha recibido en total ½ + 1/6 de pan (figura en la siguiente página).

De esta forma la descomposición

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

provendría, no del tratamiento de fracciones más elementales como hemos mostrado en el epígrafe anterior, sino de la más elemental acción de reparto de dos piezas en tres partes iguales. Las fracciones unitarias egipcias muestran además otra faceta, una nueva interpretación: No sólo serían cada una de las partes en que se puede dividir la unidad (concepción estática) sino que constituirían la expresión de la acción de repartir (concepción dinámica). Y en esta acción de reparto sólo cabe expresarse a través de fracciones unitarias.



Pues bien, sea cual sea el origen de la expresión correspondiente a ⅔, la acción de reparto o el trabajo sobre sumas de fracciones más elementales, lo cierto es que se encuentran en el Recto toda una familia de fracciones del tipo general 2/3k con k = 1,3, 5,..., 33 que responden a la misma forma de descomposición:

englobando a los diecisiete resultados 2/3 , 2/9, 2/15, 2/21, ..., 2/99 sin excepción alguna. Esto no puede ser una casualidad. Varias de estas fracciones de la forma 2/3 k admiten varias descomposiciones y, sin embargo, se escoge invariablemente la que se deriva de la descomposición de 2/3. Así, la fracción 2/15 se puede expresar de tres maneras:

escogiéndose la intermedia que expresa la relación

Este resultado en concreto no es más que la aplicación textual de la regla 61B del papiro Rhind que hemos mencionado en el epígrafe anterior. Tal parece sin embargo que el escriba fue capaz de generalizarla (como también indica la misma regla) a cualquier fracción de denominador impar, interpretando que

Criterios de elección de la descomposición en fracciones

El examen de las descomposiciones en fracciones unitarias que se encuentran en el Recto ha permitido a Gillings[6] formular una serie de criterios que debieron orientar la acción de los escribas, particularmente cuando otras descomposiciones pudieran estar a su alcance. Son los siguientes:

1. *Las fracciones unitarias se presentan en orden descendente.*

con $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$

siendo distintos entre sí sus denominadores dado que si en algún caso se repitieran nos encontraríamos en el mismo caso que se pretende resolver con las descomposiciones:

$$1 / a_2 + 1 / a_2 = 2 / a_2$$

2. *Una descomposición en dos sumandos es mejor que otra en tres sumandos que, a su vez, se prefiere a otra de cuatro sumandos.*

En todo caso, no se admiten descomposiciones de un número mayor de sumandos en orden a garantizar la mayor simplicidad posible en el cálculo posterior.

3) *Es preferible que el denominador a_1 sea el menor posible.*

Si consideramos el sistema de reparto que hemos visto aplicado a 2/3 la razón de este criterio es inmediata: Un primer denominador lo menor posible implica que la fracción correspondiente ($1/a_1$) es la mayor posible y, tras el primer reparto, lo que queda por repartir es la menor parte posible. No obstante, este criterio está sometido a dos restricciones: La primera es que resulta admisible que este primer denominador a_1 sea mayor si eso supone hacer menores y más manejables por tanto los siguientes denominadores a_2 , a_3 , a_4 . La segunda restricción se refiere a que

4) *Las fracciones con denominador par son preferidas a las que lo tienen impar.*

Esto se puede comprobar en las descomposiciones de 2/15 vistas antes y en las que aparece como menor denominador el correspondiente a 1/9 que, al ser impar, se relega por el denominador 10. Ello tiene un motivo evidente: Estas descomposiciones tienen que ser luego manipuladas operativamente de manera que se dividan por la mitad y sean duplicadas. Ambos procedimientos resultan más sencillos de realizar con fracciones de denominador par.

7. *No se admiten denominadores iguales o mayores que 1.000*

De nuevo para garantizar una mayor simplicidad en el cálculo posterior con estas descomposiciones.

En general, por tanto, se observa que los escribas no perdieron de vista en ningún momento el objetivo concreto de confeccionar estas descomposiciones: Encontrar expresiones de 2/a en forma de fracciones unitarias sencillas de integrar en los métodos de multiplicar y dividir que necesitaban. Este objetivo guía la construcción de estos criterios que fueron siendo aplicados para que cada generación de escribas refinara resultados anteriores. En el examen que sigue la presencia de estos criterios será señalada, cuando sea conveniente resaltarla, por un número entre corchetes.

Familias de 2/5 y 2/7

Hemos visto que la descomposición de 2/3 da lugar a toda una familia de fracciones de la forma 2/ 3 k. ¿Este procedimiento fue configurando otras descomposiciones del Recto? La respuesta parece positiva (con alguna excepción) para los casos de 2/5 , 2/7 y hasta 2/11.

Sea el reparto de 2 panes entre 5 trabajadores. La primera división se hace de manera que el denominador sea el menor posible [3] cumpliendo que el número de trozos originados sea superior al número de personas. En este caso, la división será en 3 partes de modo que a cada persona le correspondería 1/3 sobrando uno de estos pedazos (figura en siguiente página).

Con este sobrante se procedería entonces a una división en 5 trozos iguales (cada uno de ellos de 1/5 de 1/3 = 1/15), así que finalmente, el reparto daría lugar a la descomposición:

Pues bien, esta descomposición puede aplicarse a algunos miembros de la familia de fracciones 2/5 k como es el caso de

pero no a todos. Aquellos casos en que coinciden miembros de la familia de 2/5 k con los de la familia 2/3 k deja paso a la descomposición proporcionada por esta última, entre otros motivos porque corresponde a denominadores pares [4], como en el caso:

en vez de

Hay tres excepciones más que no responden a la consideración de la familia 2/5 k que son los siguientes:

en lugar de

previsiblemente porque en la segunda expresión se obtienen nuevamente fracciones de denominador impar [4]. Algo semejante puede suceder con

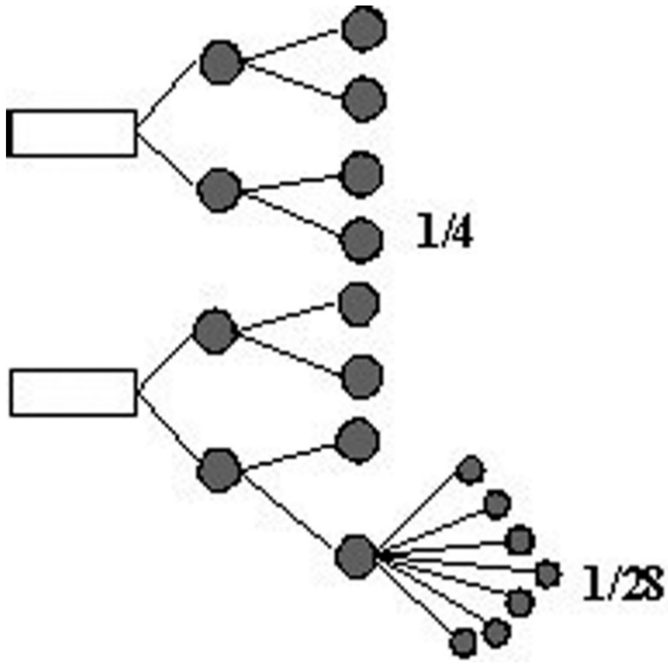
en vez de

donde incluso se puede observar que el criterio de que los denominadores sean pares [4] predomina sobre el de preferir las descomposiciones en dos sumandos respecto de las de tres [2]. Estas dos descomposiciones tendrán una explicación alternativa por el hecho de que el escriba parece haber constuido una descomposición considerando a 2/55 como miembro de la familia 2/11 k mientras que para 2/95 se escoge su pertenencia a la familia 2/19 k. Otra cosa distinta sucede con la última excepción:

en lugar de

obviamente por el mismo deseo de contar con denominadores pares. Lo excepcional es que la descomposición elegida no corresponde a ninguna familia reconocible y parece haberse construido por un procedimiento alternativo. Dada su coincidencia con otro caso posterior (2/91) reservaremos una explicación para cuando tratemos este último.

El reparto de dos panes entre siete hombres da lugar con cierta facilidad a la descomposición oportuna. Así los dos panes se dividen por la mitad dos veces consecutivas (lo que equivale a dividir entre cuatro) de manera que se obtienen 8 trozos, de los cuales se pueden adjudicar en el reparto siete de ellos correspondientes a 1/4. Sobra uno de estos trozos que se procede a dividir entre siete.



Observemos que una nueva división entre ocho dejaría un trozo sobrante entrándose en un resultado infinitamente repetido. Dividirlo dos veces en tres partes haría sobrar dos elementos iguales (2/9) con lo que para resolver el problema 2/7 habría que resolver previamente el 2/9, aparentemente más complejo. Pues bien, dividiendo directamente entre siete, cada uno de los trozos (1/7 de 1/8 = 1/28) podría adjudicarse a cada trabajador terminándose el reparto con el resultado:

La consideración de la familia de fracciones 2/7 k permite justificar las descomposiciones correspondientes a las fracciones 2/49 y 2/77 de una forma similar a la ya estudiada anteriormente. Pero de nuevo aparece la excepción ya mencionada

en lugar de

que, en esta ocasión, no puede justificarse por la presencia de denominadores impares y ni siquiera porque alguno de los denominadores (364 en concreto) transgreda el criterio de no admitir tamaños superiores a mil [5].

Procedimiento de multiplicación por un múltiplo común

Hemos comprobado que en algunos casos (2/55 y 2/95) se escogía la descomposición dada por otra familia (2/11 y 2/19 respectivamente) contra la más elemental (la familia originada por 2/5) debido a la presencia de denominadores impares. Con otras dos excepciones

(2/35 y 2/91) los objetivos no están tan claros porque, si bien en el primer caso se encuentra una descomposición en números pares esto no sucede en el segundo caso, donde se sustituye una descomposición en números pares por otra. Además, el procedimiento seguido no responde a la elección de estas fracciones (2/35 y 2/91) como miembros de otras familias lo que alerta sobre la presencia de otros procedimientos distintos de los hasta ahora vistos. De paso, es conveniente señalar que éste es uno de los motivos que llevan a pensar en la acumulación y refinamiento de resultados operativamente más sencillos a partir de las aportaciones de sucesivas generaciones de escribas que aportarían métodos diferentes.

En concreto, la presentación de la descomposición escogida para 2/35 en el papiro Rhind

se continú a con unas expresiones muy reveladoras de este procedimiento desconocido:

$\underline{35}$ $\underline{30}$ $\underline{42}$
6 **7** **5**

Estos nuevos auxiliares rojos, a la luz de lo visto en el capítulo anterior, permiten entender que si

$$1/35 \text{ de } \square = 6$$

es porque $\square = 210$

de manera que

$$2/35 \text{ de } 210 = 12$$

que sólo hay que expresar como

$$2/35 \text{ de } 210 = 12 = 7 + 5$$

tal como indican los auxiliares rojos. Pero se da el caso de que

En suma, este procedimiento particular aplicado al caso 2/35 parece consistir en los siguientes pasos:

- Escoger un múltiplo de 35 (70, 105, 140, 175, 210, etc.).
- Hallar 1/35 de dicho número (2, 3, 4, 5, 6, etc., respectivamente).
- Doblarlo para alcanzar 2/35 (4, 6, 8, 10, 12, etc.).
- Descomponerlo en dos números (por ejemplo, 8 = 6 + 2 correspondiente al número original 140) de manera que cada uno de los sumandos pueda corresponder a 1/□ de 140.
- Se van probando estas combinaciones hasta encontrar la del número más bajo (en este caso 210) para el que el paso anterior de resultados enteros (en el caso de elegir 140, no cabe la descomposición en dos fracciones unitarias).

Algo semejante puede aplicarse (aunque no se haga explícito en el papiro) en el caso de la descomposición

para la que vamos a seguir los pasos indicados en el procedimiento anterior:

- Se escoge un múltiplo de 91 que permita encontrar una solución entera (9.100).
- 1/91 de 9100 = 100.
- Se considera el doble de manera que corresponda a 2/91 de 9100 = 200.
- Se descompone en dos números adecuados: 200 = 130 + 70.
- Se busca las fracciones unitarias tales que 1/□ = 130 , 1/□ = 70 que corresponden precisamente a 1/70 y 1/130, respectivamente. Esta es la solución.

Generalización numérica del reparto

Todas las fracciones del tipo 2/n siendo n un número primo constituyen un nutrido grupo de descomposiciones (las correspondientes, además de las vistas, a 2/11, 2/13, 2/17, 2/19...). Excepto la primera (2/11) las demás presentan descomposiciones en tres y cuatro sumandos. Si bien para los casos más sencillos vistos antes la técnica del reparto sucesivo puede haber sido el origen de estas descomposiciones es previsible que cuando se trata de dividir dos panes entre 19 u 89 hombres, por ejemplo, el procedimiento no consiste en apelar a repartos de materiales concretos sino que la acción de repartir se generalice utilizando la correspondencia entre la acción ejecuta (el reparto en k partes) y la operación aritmética (la división entre k). Vamos a proceder de esta forma para algunos de las fracciones consideradas antes.

Sea el caso de 2 panes repartidos entre 13 hombres, es decir, 2/13. Las divisiones realizadas serían las siguientes:

- Se buscaría el número menor en cuya división se generaran más de 13 partes. En este caso sería el 7 puesto que daría lugar a 14 partes, lo que conduce a la descomposición
  2/13 = 1/7 + 1/91
- Esta expresión utilizaría fracciones de denominador impar, contra uno de los criterios preferidos por el escriba [4]. Por ello la regla habrá de modificarse escogiendo al menor número par que verifique la condición anterior. En este caso, la división de cada pan en 8 partes daría lugar a 16 partes de 1/8 sobrando tres de ellas tras repartir una a cada hombre.
- Se consideraría así que las partes sobrantes serían 3/8 = 1/4 + 1/8. Cada una de ellas se dividiría ahora en 13 partes que es un número primo y, por tanto, habrá que acabar finalmente el reparto con una división por él. De esta forma se llegaría a

que es la descomposición que aparece en el Recto.

Este tipo de reglas no son invariables sino que el escriba parece ajustarlas a sus criterios preferentes. Esto se puede observar en la expresión de 2/17 cuya primera fracción unitaria no es 1/10 como correspondería al primer reparto expuesto antes, sino 1/12. ¿Por qué escoger para la primera división 12 en lugar de 10? Previsiblemente, porque 12 es el primer número par que sólo presenta como factores 2 y 3 mientras que el diez requeriría una división entre cinco, de manera que la primera división se ajusta a los deseos de repartir en dos y tres partes sucesivamente limitando en lo posible el número de formas a repartir.

- Se dividen los dos panes en dos, dos y tres partes sucesivamente, es decir, en 12 partes iguales cada pan. Se entrega 1/12 y quedan 7 trozos de este tamaño.
- Se busca la expresión en fracciones unitarias más sencilla a partir de estas siete fracciones de 1/12:

(1/12 + 1/12) + (1/12 + 1/12) + (1/12 + 1/12) + 1/12 = (1/6 + 1/6) + (1/6 + 1/12) = 1/3 + 1/4

Se hace la división final (en 17 partes esta vez) de las dos fracciones resultantes, obteniéndose finalmente:

tal como aparece en el Recto.

Aunque el grado de complejidad operativa aumente, el resto de las descomposiciones del papiro Rhind para las fracciones del tipo 2/k con k un número primo, pueden alcanzarse por el mismo procedimiento. La disponibilidad de métodos alternativos como es el empleo de los auxiliares rojos mantiene la posibilidad de que algunos de estos resultados se alcanzasen por uno o más caminos sin que sea posible otra cosa que hipotetizar cuál sea el más sencillo de utilizar para los escribas egipcios.

Los repartos entre diez

Con las descomposiciones incluidas en el Recto y las reglas de sumas de fracciones examinadas en el capítulo anterior los egipcios disponían de todas las herramientas operativas necesarias para realizar todo tipo de multiplicaciones y divisiones. Uno de los ejemplos más ilustrativos es el de la división que realizan con frecuencia entre diez, habida cuenta que ésta es la base de su sistema decimal de numeración. Precisamente al comienzo del Verso del papiro Rhind se presenta una tabla de división entre diez sin más comentarios:

“[1 entre 10] $\underline{10}$
[2 entre 10] $\underline{5}$
[3 entre 10] $\underline{5}$ $\underline{10}$
[4 entre 10] $\underline{3}$ $\underline{15}$
[5 entre 10] $\underline{2}$
[6 entre 10] $\underline{2}$ $\underline{10}$
[7 entre 10] ⅔ $\underline{30}$
[8 entre 10] ⅔ $\underline{10}$ $\underline{30}$
[9 entre 10] ⅔ $\underline{5}$ $\underline{30}$”

para continuar con seis problemas donde se reparte un número variable de panes entre diez. La presentación de estos problemas se puede ejemplificar con el primero:

> **Rhind - Problema 1**: “Ejemplo de división de 1 pan entre 10 hombres. Hacer la multiplicación de   veces 10 [para comprobar el resultado]. El procedimiento es como sigue:

[1	$\underline{10}$	
2	$\underline{5}$	✓
4	$\underline{3}$ $\underline{15}$]	
8	⅔ $\underline{10}$ $\underline{30}$	✓

Total: 1 [pan], que es lo mismo”.

En este tipo de problemas hay que distinguir entre la forma de obtener el resultado y la comprobación posterior que es la que suele hacer explícita el escriba para asegurar la validez del resultado. Respecto a la primera, el procedimiento a seguir parece sencillo:

- 1 pan dividido en 10 partes da lugar directamente a la fracción $\underline{10}$.
- 2 panes dividido entre 10 es el doble, de manera que hay que dividir entre dos el denominador anterior dando lugar a $\underline{5}$.
- 3 panes entre 10 es lo mismo que la suma de 2 panes entre 10 y luego 1 entre 10, de manera que el resultado será la suma de los anteriores: $\underline{5}$ $\underline{10}$.
- 4 panes entre 10 es el doble de 2 panes entre 10 que, por el Recto, es 2/5 = $\underline{3}$ $\underline{15}$.
- 5 panes entre 10 daría lugar directamente a un reparto de $\underline{2}$ para cada hombre aunque indirectamente se puede llegar al mismo resultado sumando 3 panes y 2 panes entre 10, resultando en la suma $\underline{5}$ $\underline{5}$ $\underline{10}$ = $\underline{3}$ $\underline{10}$ $\underline{15}$. La equivalencia de este resultado con $\underline{2}$ no es inmediata. No es descartable que, a partir de la constancia de que $\underline{3}$ + $\underline{6}$ = $\underline{2}$, que se encuentra en otros lugares del Rhind, se concluya en que $\underline{10}$ $\underline{15}$ = $\underline{6}$ Que también aparece en el Rhind como ejemplo del generador (2,3).
- Los demás resultados del reparto se obtendrían de alguna de las maneras ya descritas para casos anteriores.

Pues bien, los resultados del Recto no sólo están presentes en la construcción de estas divisiones sino también en sus comprobaciones posteriores, consistentes en multiplicar por diez el resultado para alcanzar finalmente el número de panes que se repartía. Lo hemos podido comprobar en el primer problema pero vamos a extender su examen a dos casos más que ejemplifican con claridad el empleo sistemático de las descomposiciones del Recto en las operaciones aritméticas elementales.

En el problema 2 se dividen 2 panes entre diez hombres dando como resultado

2 entre 10 = $\underline{5}$

Para comprobarlo:

	1	$\underline{5}$
Por la descomposición de 2/5	2	$\underline{3}$ $\underline{15}$ ✓
Por la descomposición de 2/15	4	2/3 $\underline{10}$ $\underline{30}$
	8	1 $\underline{3}$ $\underline{5}$ $\underline{15}$ ✓

lo que da un total en la columna de la derecha de:

1 ($\underline{3}$ $\underline{3}$) $\underline{5}$ ($\underline{15}$ $\underline{15}$) = 1 ⅔ ($\underline{5}$ $\underline{10}$ $\underline{30}$) = 1 ⅔ $\underline{3}$ = 2
Recto Generador (1,2,6)

El problema 5, de cierta complejidad operativa, reparte 8 panes entre 10 hombres de manera que el resultado es

8 entre 10 = ⅔ $\underline{10}$ $\underline{30}$

comprobándolo del siguiente modo:

1	⅔ $\underline{10}$ $\underline{30}$
2	1 $\underline{3}$ ($\underline{5}$) ($\underline{15}$)
4	2 ⅔ ($\underline{3}$ $\underline{15}$) ($\underline{10}$ $\underline{30}$) = 3 $\underline{10}$ ($\underline{15}$) $\underline{30}$
8	6 $\underline{5}$ ($\underline{10}$ $\underline{30}$) $\underline{15}$

que hace un total en la columna de la derecha de:

7 $\underline{3}$ ($\underline{5}$ $\underline{5}$) $\underline{10}$ ($\underline{15}$ $\underline{15}$) $\underline{30}$ =
= 7 ($\underline{3}$ $\underline{3}$) $\underline{15}$ ($\underline{10}$ $\underline{10}$) ($\underline{30}$ $\underline{30}$) =
= 7 ⅔ $\underline{5}$ ($\underline{15}$ $\underline{15}$) = 7 ⅔ ($\underline{5}$ $\underline{10}$ $\underline{30}$) = 8

La tabla de división por diez que aparece en el Verso del papiro Rhind es de aplicación a problemas prácticos por su calidad de base de la numeración egipcia, como se ha comentado al principio del epígrafe. Lo que esto quiere decir resulta evidente a la luz de uno de los problemas que aparece en el papiro Reisner I visto en el capítulo anterior. En efecto, entonces abordamos la multiplicación de fracciones que permitía el cálculo de volúmenes de piedra para su transporte y colocación. La tabla de datos que entonces se dio no estaba completa por cuanto faltaba una columna referente al número de trabajadores que hace falta para dicho transporte. Algunos de estos datos se muestran en la table de la siguiente página.

¿Cómo se calculaba el número de trabajadores? S nos fijamos en la línea G.6 encontramos claramente especificado que habría un trabajador encargado por cada 10 codos cúbicos de piedra. Examinemos las demás líneas para ver si esta relación se confirma para lo cual aplicaremos sistemáticamente la tabla del Verso del papiro Rhind:

(G.7) 2 $\underline{2}$: 10 = (2 : 10) + ($\underline{2}$: 10) = $\underline{5}$ + $\underline{20}$
(G.13) 27 : 10 = (20 : 10) + (7 : 10) = 2 + $\underline{2}$ $\underline{5}$
(G.18) 36 : 10 = (30 : 10) + (6 : 10) = 3 + $\underline{2}$ $\underline{10}$

Línea	Longitud	Anchura	Grosor	Uds.	Volumen	Número Hombres
G6	8	5	$\underline{4}$	1	10	1
G7	3	2 $\underline{2}$	$\underline{4}$	1	2 $\underline{2}$	$\underline{5}$ $\underline{20}$
G10	52	3	$\underline{4}$	1	39	4
G13	10 $\underline{2}$	8 $\underline{2}$	¿ $\underline{3}$?	1	27	$\underline{22}$ $\underline{5}$
G15	6	4	2	1	48	4 $\underline{2}$ $\underline{4}$ $\underline{20}$
G18	3	3	2	2	(3) 6	3 $\underline{2}$ $\underline{10}$

Todos los resultados anteriores confirman el hecho de que se adjudica 10 codos cúbicos de piedra a cada hombre, salvo en dos excepciones que no resultan tales:

(G.15) $48 : 10 = (40 : 10) + (8 : 10) =$
$= 4 + \underline{2}\ \underline{5}\ \underline{10} = 4 + \underline{2}\ \underline{4}\ \underline{20}$

expresión esta última que se obtiene teniendo en cuenta que

$\underline{2}\ \underline{5}\ \underline{10} = \underline{2}\ \underline{5}\ (\underline{20}\ \underline{20}) = \underline{2}\ (\underline{5}\ \underline{20})\ \underline{20} = \underline{2}\ \underline{4}\ \underline{20}$

aplicando la expresión de sumas de fracciones vistas en el capítulo anterior y, en concreto, la línea 2 del Rollo de Cuero. Respecto a la última

(G.10) $39 : 10 = (30 : 10) : (9 : 10) = 3 + \underline{2}\ \underline{3}\ \underline{15}$

que el autor del papiro escribe directamente como $39 : 10 = 4$ cuando en realidad al resultado le faltan 2/15 = $\underline{10}\ \underline{30}$ para llegar a cuatro trabajadores. Es evidente que el escriba se conforma en este caso con una aproximación más manejable.

Reparto de grano por fracciones de Horus

Concluiremos este capítulo con un tipo de problemas que debieron ser muy frecuentes en las acciones de reparto. La cuestión que se presenta es el reparto de una cantidad de grano contenida en un granero pero de forma que el resultado se exprese en ‘fracciones de Horus’ ($\underline{2}$,$\underline{4}$,$\underline{8}$,$\underline{16}$,$\underline{32}$,$\underline{64}$) tan cómodas para su manejo posterior por el escriba egipcio.

> **Rhind - Problema 47**: “Si el escriba te dice, ‘Conoce cuál es el resultado cuando 100 heqat cuádruples de grano son divididos por 10 [y sus múltiplos] en un granero circular [o rectangular]’”.

La tabla de resultados de dividir en 10, 20, 30, ..., 100 partes iguales los 100 heqts de grano, comienza de un modo sencillo:

1	100
$\underline{10}$	10

$\underline{20}$	5
$\underline{30}$	?

Para obtener este resultado se debe contar con 30 hasta 100, es decir, realizar 100 : 30

1	30	✓
2	60	✓
2/3	20	
$\underline{3}$	10	✓
------------------------		
3 $\underline{3}$	100	

pero ahora hay que expresar 3 $\underline{3}$ en función de las fracciones Horus utilizando todos los resultados del Rollo de Cuero y del Recto que sean necesarios:

$$3\ \underline{3} = 3\ \underline{4}\ \ \underline{12}\ [a] = 3\ \underline{4}\ \ \underline{16}\ \ \underline{48}\ [b] =$$
$$= 3\ \underline{4}\ \ \underline{16}\ \ \underline{64}\ \ \underline{192}\ [c] =$$
$$= 3\ \underline{4}\ \ \underline{16}\ \ \underline{64}\ \text{ heqat } 1\ ⅔\ \text{ ro } [d].$$

[a] Por la línea 3 del Rollo de Cuero.
[b] Hallando la mitad de la suma $\underline{6}$ = $\underline{8}$ + $\underline{24}$ que aparece en el Rhind.
[c] Calculando la cuarta parte de $\underline{12}$ = $\underline{18}$ + $\underline{36}$ (Línea 20 del Rollo de Cuero).
[d] Siendo 1 ro = $\underline{320}$ de heqat, $\underline{192}$ de heqat supone 1 ⅔ ro.

Podemos entonces continuar:

$\underline{30}$	3 $\underline{4}$ $\underline{16}$ $\underline{64}$ 1 ⅔ ro
$\underline{40}$	2 $\underline{2}$
$\underline{50}$	2
$\underline{60}$	1 $\underline{2}$ $\underline{8}$ $\underline{32}$ 3 $\underline{3}$ ro

ya que, hallando la mitad de $\underline{30}$, se obtendría

$\underline{60}$	1 $\underline{2}$ $\underline{8}$ $\underline{32}$ $\underline{128}$ $\underline{2}$ $\underline{3}$ ro

pero $\underline{128}$ de heqat equivale a 2 $\underline{2}$ ro que, sumados a los $\underline{2}$ $\underline{3}$ ro da el resultado expresado por el escriba.

Con cálculos semejantes se llegaría a completar esta tabla de divisiones:

$\underline{70}$	1 $\underline{4}$ $\underline{8}$ $\underline{32}$ $\underline{64}$, 2 $\underline{14}$ $\underline{21}$ $\underline{42}$ ro
$\underline{80}$	1 $\underline{4}$
$\underline{90}$	1 $\underline{16}$ $\underline{32}$ $\underline{64}$, $\underline{2}$ $\underline{18}$ ro
$\underline{100}$	1

Notas

1 Janssen, J. (1975): “Commodity prices from the Ramessid period”.
2 Ibidem.
3 Menu, B. (1982): “Recherches sur l’histoire juridique, economique et sociale de l’Ancienne Egypte”.
4 Gillings, R.J. (1972): “Mathematics in the time of faraons”.
5 Gairín, J.M. (1999): “Los enigmáticos cálculos del escribe Ahmes”.
6 Gillings, R.J. Op. cit.

Capítulo 9
El reparto desigual

Raciones desiguales

El reparto de raciones se calculaba, como hemos visto en el capítulo anterior, mediante la división de los envíos de viandas y mercancías variadas que llegaban al templo o a los equipos de trabajadores. Sin embargo, este reparto igualitario sólo tenía lugar cuando el grupo de hombres entre los que repartir pertenecían al mismo nivel laboral. El problema del reparto empezaba a complicarse necesariamente cuando se llevaba a cabo respetando las jerarquías presentes tanto en el templo como en todo equipo de trabajadores.

Así, el papiro Berlín 10005[1] informa de las raciones diarias de pan y cerveza entre el personal del templo de Illahun encontrándose que, mientras el director recibía 16 ⅔ panes por día, el sacerdote lector principal llegaba a 10, el escriba tenía 2 + 1/6 + 1/18 panes, el policía 1 ⅔ panes y a un trabajador normal sólo le alcanzaba ½ + 1/18 de pan, es decir, poco más de medio pan diario. La diferencia se puede notar que era apreciable.

Se puede afirmar que esto debía suceder en todos los ámbitos puesto que en un equipo de trabajadores de Deir el Medineh, ya en el Imperio Nuevo, se han encontrado datos económicos que indican[2] que el jefe del equipo recibía 5 ½ khar de trigo y 2 khar de cebada al mes en contraste con los 4 khar y 1 ½ khar que recibía, respectivamente, un trabajador o los 3 1/4 y 1 1/4 khar que tenía finalmente un guardián.

Los repartos, por tanto, asignaban partes desiguales pero como los envíos eran variables era necesario establecer una relación numérica proporcional entre las diversas categorías: Para todo reparto que hubiera que realizar en el templo de Illahun, por ejemplo, si el policía recibía el equivalente a una unidad, el sacerdote lector tendría derecho a seis veces más y el director del templo a diez veces más al tiempo que el trabajador ordinario recibiría la tercera parte del policía. De manera que la necesidad de hacer un reparto proporcional era inmediata y es por ello que, a la hora de formar a un estudiante de escriba, Ahmes expone en el papiro Rhind varios de estos problemas que examinaremos en su creciente grado de complejidad aplicándolos finalmente al reparto en el templo mencionado.

> **Rhind - Problema 65**: "Ejemplo de dividir 100 panes entre 10 hombres: un barquero, un capataz, un guardián, teniendo cada uno el doble [que los siete marineros ordinarios. ¿Cuál es la parte de cada uno?]".

El procedimiento empleado por el escriba es sencillo: Si los tres hombres importantes deben recibir cada uno el doble que los siete marineros entonces considera que cada uno de los primeros equivale a dos marineros. De esta forma habría que repartir los 100 panes en

$$2 + 2 + 2 + 7 = 13 \text{ raciones}$$

de las que dos de ellas corresponderían al barquero, otras dos al capataz y dos más al guardián, siendo sólo una para cada marinero. Por tanto, lo que se debe hacer es dividir 100 entre 13 (Contar con 13 hasta alcanzar 100):

1	13	✓
2	26	✓
4	52	✓
⅔	8 ⅔	✓
$\underline{39}$	$\underline{3}$	✓
--------------		
7 ⅔ $\underline{39}$	100	

De este modo, si cada marinero recibe esta cantidad de panes, los tres primeros tendrán el doble

$$2 \times (7\ ⅔\ \underline{39}) = 15\ \underline{3}\ \underline{26}\ \underline{78} \text{ panes}$$

dado que, según el Recto, 2/39 = $\underline{26}$ $\underline{78}$.

Un problema similar, aunque en un contexto de recepción de partes desiguales según el número de trabajadores registrados en cada cuadrilla, sería el siguiente:

> **Rhind - Problema 68**: "Si un escriba te dice: '4 capataces han recibido su grano [en la cantidad de] 100 heqats-cuádruples, consistiendo la primera cuadrilla en 12

hombres, la segunda en 8, la tercera en 6 y la cuarta en 4' [¿cuánto recibe cada capataz?]”.

Obsérvese que no es necesario asignar a una de las partes el valor relativo de la unidad para medir respecto de ella las partes restantes. El reparto proporcional puede ser variado de manera que no sea necesario ‘reducir’ las relaciones numéricas a otras expresadas a aprtir de una unidad. Por ejemplo, en este problema podría decirse que, tomando como unidad la cuadrilla de 4 trabajadores, las demás deberían recibir 1 ½ más, el doble o el triple que la primera. Esto es innecesario para el escriba revelándose así el dominio alcanzado en el tratamiento de la proporcionalidad numérica.

La resolución del problema, por otra parte, aunque algo más compleja operativamente responde al mismo método seguido en el problema anterior. Se considera la totalidad de los hombres implicados:

$$12 + 8 + 6 + 4 \quad = \quad 30 \text{ trabajadores}$$

de modo que se puede calcular lo que le correspondería a cada hombre dividiendo 100 entre 30,

1	30	✓
2	60	✓
$\underline{3}$	10	✓

----

3 $\underline{3}$ 100

La complejidad añadida proviene de que esta parte individual (3 $\underline{3}$ heqat) se desea expresar en ‘fracciones Horus’, lo que obliga a considerar la expresión que el escriba deducirá en el problema 81 del propio papiro Rhind:

$$3\ \underline{3}\ \text{heqat} \quad = \quad 3\ \underline{4}\ \ \underline{16}\ \ \underline{64}\ \ \underline{320}\ \ \underline{480}\ \text{heqat} \quad =$$
$$= \ 3\ \underline{4}\ \ \underline{16}\ \ \underline{64}\ \text{heqat}\ 1\ \tfrac{2}{3}\ \text{ro}$$

de modo que las partes buscadas se consiguen multiplicando esta parte individual por 4, 6, 8 y 12, respectivamente, resultado que se puede deducir de la operación:

1	3 $\underline{4}$ $\underline{16}$ $\underline{64}$	heqat 1 ⅔ ro
2	6 $\underline{2}$ $\underline{8}$ $\underline{32}$	heqat 3 $\underline{3}$ ro
4	13 $\underline{4}$ $\underline{16}$	heqat 6 ⅔ ro
8	26 $\underline{2}$ $\underline{8}$	heqat 13 $\underline{3}$ ro

Primera cuadrilla (12 hombres): 39 $\underline{2}$ $\underline{4}$ $\underline{8}$ $\underline{16}$ heqat 20 ro = 40 heqat
Segunda cuadrilla (8 hombres): 26 $\underline{2}$ $\underline{8}$ heqat 13 $\underline{3}$ ro

Tercera cuadrilla (6 hombres): 19 $\underline{2}$ $\underline{4}$ $\underline{8}$ $\underline{16}$ $\underline{32}$ heqat 10 ro = 20 heqat
Cuarta cuadrilla (4 hombres): 13 $\underline{4}$ $\underline{16}$ heqat 6 ⅔ ro

Un problema semejante, del que sólo ofreceremos la solución dada por el escriba por ser muy similar al anterior, presenta el reparto proporcional en un contexto bien distinto:

Rhind - Problema 62: "Ejemplo de cálculo de una bolsa conteniendo varios metales preciosos. Si te dicen: 'Una bolsa conteniendo [pesos iguales] de oro, plata y plomo se compra por 84 shaty, ¿cuál es la cantidad de cada metal precioso?' Lo que es dado por un deben de oro es 12 shaty, de plata es 6 shaty y para el plomo es 3 shaty.
Añadir junto lo que se da por un deben de cada metal precioso y el resultado es 21. Multiplicar 21 hasta llegar a 84 shaty por el que la bolsa es comprada. El resultado es 4, que es el número de deben de cada metal precioso".

Como se ha comentado antes el dominio de las relaciones numéricas características de la proporcionalidad era amplio entre los escribas. En el siguiente problema, bajo una estructura similar al anterior, se aprecia sin embargo la presencia de estas relaciones entre fracciones incluso inferiores a la unidad.

Rhind - Problema 63: 700 panes entre 4 hombres, [con] ⅔ para uno, $\underline{2}$ para otro, [$\underline{3}$ para el tercero, y $\underline{4}$ para el cuarto]. Calcular la parte de cada [hombre]".

Como en el problema anterior se suman las partes que corresponden a cada uno que no tienen por qué totalizar la unidad:

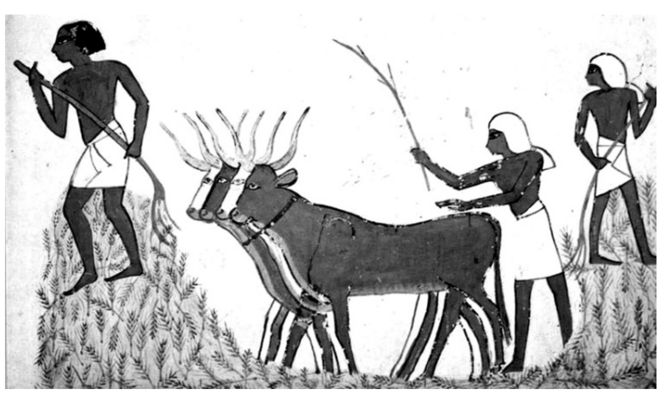
$$\tfrac{2}{3} + \underline{2} + \underline{3} + \underline{4} = 1\ \underline{2}\ 4$$

de manera que a continuación se divida 700 entre este resultado 1 $\underline{2}$ $\underline{4}$ (que actuaría a modo de parte unitaria):

1	1 $\underline{2}$ $\underline{4}$	
2	3 $\underline{2}$	
4	7	
400	700	✓

Como la parte correspondiente a la unidad de reparto es de 400 panes, habrá que multiplicar por 400 panes cada fracción correspondiente a cada hombre:

⅔ de 400 = 266 ⅔ panes
$\underline{2}$ de 400 = 200 panes
$\underline{3}$ de 400 = 133 $\underline{3}$ panes
$\underline{4}$ de 400 = 100 panes



El escriba se plantea en otro problema una cuestión de mera proporcionalidad numérica dentro de un contexto de reparto desigual. Pero en esta ocasión se da la respuesta global correspondiente a lo que podía ser cada cuadrilla de trabajadores preguntándose por las diferencias entre las partes individuales correspondientes.

> **Rhind - Problema 39**: “Ejemplo de calcular excesos [hallar la diferencia entre las partes] cuando 100 panes son para 10 hombres, 50 para 6, y 50 para 4. ¿Cuál es el exceso de las partes?”

Dado que para la primera cuadrilla la parte individual es inmediata (10 panes/hombre) centraremos los cálculos en las otras dos. Para ello habrá que dividir 50 entre 6 y 4:

1	6				
2	12		1	4	
4	24		10	40	✓
8	48	✓	2	8	✓
$\underline{3}$	2	✓	$\underline{2}$	2	✓
------------			------------		
8 $\underline{3}$	50		12 $\underline{2}$	50	

De manera que el exceso de la parte mayor respecto de la menor será de

$$12\ \underline{2}\ -\ 8\ \underline{3}\ =\ 12\ \underline{3}\ \underline{6}\ -\ 8\ \underline{3}\ =\ 4\ \underline{6}\ \text{ panes}$$

Los salarios del templo de Illahun

Con el procedimiento que hemos visto aplicado para el reparto proporcional en los ejemplos precedentes la distribución de los salarios entre el personal del templo de Illahun, a que antes se ha hecho referencia, no es más que una aplicación más extendida a un conjunto numeroso de sacerdotes y trabajadores[3].

Se ha incluido en la tabla solamente cuatro columnas que corresponden la primera al tipo de personal al que va dirigido el reparto de viandas; la segunda muestra el número relativo de raciones que se debe a cada uno, es decir, tomando por unidad la ración del ‘policía’ esta columna contiene el número de raciones que se debe adjudicar al resto de personal.

Personal	Raciones	Pan (1 2/3 hogazas)	Cerveza sd' (2/3 $\overline{6}$ jarras)
Director	10	16 2/3	8$\overline{3}$
Lector principal	6	10	5
Sacerdote Ibh (3)	6	10	5
Sacerdote real (2)	4	6 2/3	3$\overline{3}$
Lector ordinario	4	6 2/3	3$\overline{3}$
Sacerdote jefe	3	5	2$\overline{2}$
Sacerdote wtw	2	3$\overline{3}$	1 2/3
Sacerdote imi	2	3$\overline{3}$	1 2/3
Escriba	1$\overline{3}$	2$\overline{6}$ $\overline{18}$	1$\overline{9}$
Guardián	1$\overline{3}$	2$\overline{6}$ $\overline{18}$	1$\overline{9}$
Policía	1	1 2/3	2/3 $\overline{6}$
Vigilante	2/3	1$\overline{9}$	$\overline{2}$ $\overline{18}$
Trabajador	$\overline{3}$	$\overline{2}$ $\overline{18}$	$\overline{4}$ $\overline{36}$
Otros trabajadores [Omitidos]	$\overline{3}$	$\overline{2}$ $\overline{18}$	$\overline{4}$ $\overline{36}$
Totales	**42**	**70**	**35**

La tercera columna presenta la distribución sobre 70 panes recibidos en el envío al que se hace referencia mientras que la cuarta columna contiene la distribución de 35 jarras de cerveza sd' que, lógicamente, presentará la mitad de las cantidades de la columna anterior. No se ha incluido una quinta columna de reparto de 115 ½ jarras de cerveza hpnw por no añadir nada diferente a lo anterior y encerrar un pequeño error que el escriba contable va arrastrando a lo largo de los datos de la columna.

Respecto al reparto de panes vuelve a seguirse el mismo procedimiento ya visto. Se suma el total de raciones de la segunda columna que tocarían a cada elemento del personal si al policía le corresponde una ración unidad. Son números, pues, relativos a dicha unidad y que totalizan 42. A partir de ello se divide el número de panes (70) entre 42 para conseguir los panes que le corresponden al policía:

$$\begin{array}{ll} 1 & 42 \\ ⅔ & 28 \\ \hline 1\ ⅔ & 70 \end{array}$$

de modo que por cada ración que aparece en la segunda columna habría que dar 1 ⅔ panes, lo que permite averiguar lo que le corresponde a cada miembro del personal. Por ejemplo:

Director del Templo (10 raciones):

$$10 \times 1\ ⅔ = 16\ ⅔ \text{ panes}$$

Sacerdote jefe (3 raciones):

$$3 \times 1\ ⅔ = 5 \text{ panes}$$

Escriba (1 $\underline{3}$ ración):

$$1\ \underline{3} \times 1\ ⅔ = 2\ \underline{6}\ \underline{18} \text{ panes}$$

Trabajador ($\underline{3}$ ración):

$$\underline{3} \times 1\ ⅔ = \underline{2}\ \underline{18} \text{ panes}$$

dado que, en el caso del escriba ⅔ de $\underline{3}$ = $\underline{6}$ $\underline{18}$ y, para el trabajador,

$\underline{3}$ x 1 ⅔ = $\underline{3}$ + ⅔ de $\underline{3}$ = $\underline{3}$ $\underline{6}$ $\underline{18}$ = $\underline{2}$ $\underline{18}$ panes

Cuando se trata de repartir las jarras de cerveza sd’ recibidas se ha de hallar la mitad de lo que correspondía por unidad a los panes. Así, la mitad de 1 ⅔ será

$$\underline{2} + \underline{3} = (\underline{3} + \underline{6}) + \underline{3} = ⅔\ \underline{6} \text{ jarras}$$

a partir de lo cual se pueden hacer los cálculos semejantes a los anteriores para confeccionar la cuarta columna de la tabla.

Existe un hecho destacable con el carácter práctico de estos resultados que se ha destacado por algunos autores[4]. Algunos han intentado deducir a partir de resultados como los presentes cuánto alimento constituía la dieta cotidiana de los egipcios así como, paralelamente, a cuántas personas podría alcanzar (en relación a la capacidad de los graneros encontrados en algunas ciudades). Sin embargo, en estos cálculos ha causado extrañeza la nimiedad de algunos de los resultados y la casi imposibilidad de tomarlos textualmente. Por ejemplo, ¿cómo entender que un trabajador se lleve 1/4 más 1/36 de jarra? ¿Es que el contenido de la jarra se va a dividir en 36 partes para darle a cada trabajador una de ellas? El pan, por otro laddo, ¿se va a dividir en 18 partes iguales como aparece en la tabla de reparto?

La situación real se puede entender mejor cuando consideramos un texto encontrado en el templo del Imperio Medio al dios Upuaut en Asiut[5]:

> “En cuanto a un día del templo, corresponde a $\underline{360}$ parte del año. Ahora bien, dividirás todo lo que entre en el templo - pan, cerveza y carne -, a modo de proporción diaria. Es decir, va a ser $\underline{360}$ parte del pan, de la cerveza y de todo lo que entre en este templo para [cualquiera de] estos días que te he asignado”.

Que éste era un procedimiento rutinario se hace evidente cuando se encuentra en el papiro Rhind un problema de reparto diario de una cantidad dada al año concluyéndose con la recomendación “Debes proceder de esta manera en cualquier ejemplo como éste”.

> **Rhind - Problema 66**: “Se dan 10 heqat de grasa para un año. ¿Cuál es la cantidad para un día?”

El escriba lo resuelve transformando las unidades (heqat, año) en subunidades (ro, días) de manera que se tienen 10 x 320 = 3200 ro de grasa correspondientes a 365 días (incluyendo los ‘epagómenos’ o cinco días fuera del conteo habitual de meses). El cálculo a efectuar consiste en dividir los 3200 ro de grasa entre 365:

	1	365	
	2	730	
	4	1460	
(Quedan 280)	8	2920	✓
(Quedan 36 ⅔)	⅔	243 $\underline{3}$	✓
(Queda $\underline{6}$)	$\underline{10}$	36 $\underline{2}$	✓
	$\underline{730}$	$\underline{2}$	
	$\underline{2190}$	$\underline{6}$	✓

----

8 ⅔ $\underline{10}$ $\underline{2190}$ 3200 ro

Es evidente que el escriba no puede considerar materialmente 1/2190 de ro pero sí puede, tomando esta parte del 'día del templo' calcular la grasa correspondiente a tres o cuatro meses de vida cotidiana en el templo. Por otro lado, dada la presencia alternativa de distintos equipos (*phylae*) en la marcha de la institución esta parte diaria permite saber lo que hay que entregar a cada miembro de un equipo si se calcula que su servicio anual ha correspondido, por ejemplo, a 150 días. Basta multiplicar los días que correspondan por esta parte diaria.

Reparto desigual en Deir el Medineh

Se decía al comienzo del capítulo que los repartos proporcionales de los envíos en alimentos y otras mercancías debían estar presentes, no sólo en los templos, sino en cualquier equipo de trabajadores para cualquier institución o propiedad privada. En los conocidos papeles de Hekanakhte en los que un propietario de tierras durante el Primer Período Intermedio da consejos a su familia, desde la lejanía, sobre la dirección correcta de sus tierras, se lee: "Daréis las raciones a mis gentes mientras que ellos trabajen"[6].

De igual manera, se dispone de algunos ostracas correspondientes al reparto de raciones en Deir el Medineh durante el Imperio Nuevo que aportan ejemplos concretos de estos repartos desiguales al tiempo que muestran las dificultades que afrontan los investigadores en el momento de interpretar algunos de estos trozos de piedra o de cerámica en parte ilegibles, en parte golpeados y rotos.

Se ha comentado al principio del capítulo las raciones mensuales recibidas por tres tipos de personas en el poblado:

Jefe ....5 ½ khar de trigo + 2 khar de cebada
Escriba ...... 2 ½ 1/4 khar de trigo + 1 khar de cebada
Trabajador ordinario ….4 khar de trigo + 1 ½ khar de cebada

La primera observación a realizar es que la parte del escriba, personaje considerablemente importante en el trabajo de estos constructores de tumbas, no puede haber recibido una cantidad menor que un simple trabajador. Ello le induce a Janssen[7] a suponer que la cantidad asignada al escriba era la mitad de la total. Dado que los equipos de trabajo se dividían en dos 'tripulaciones' (por analogía con las dos filas de remeros en la navegación) la cantidad mencionada podía corresponder a cada una de las tripulaciones de modo que el escriba cobrara finalmente lo mismo que el jefe del equipo.

En todo caso, el ostraca Gardiner 262[8] muestra las asignaciones concedidas a un jefe y un escriba durante los cinco días 'epagómenos':

> "Dando las raciones para los cinco Días Epagómenos: El trabajador jefe, $\underline{4}$ $\underline{16}$ khar 3 $\underline{3}$ hin; el escriba, $\underline{8}$ $\underline{32}$ khar 1 ⅔ hin; hace $\underline{2}$ khar. 16 hombres, cada uno $\underline{4}$ khar, hace 4 khar".

Aunque no se mencione es posible suponer que el reparto se refiere a la cebada por cuanto la cantidad mensual por trabajador es de 1 ½ khar de manera que, considerando la sexta parte que corresponde a cinco días respecto de los treinta del mes,

$$1/6 \times 1\tfrac{1}{2} = 1/4$$

que coincide con el dato expresado en el ostraca.

De igual manera, en lo que se refiere al jefe el escriba se vería obligado a hacer el siguiente cálculo: Los dos khar de cebada se dividiría entre 6 obteniéndose 1/3 de khar que habría que expresar en ‘fracciones de Horus’ del siguiente modo:

$\underline{3}$ khar = $\underline{4}$ + $\underline{12}$ [a] = $\underline{4}$ + $\underline{16}$ + $\underline{48}$ [b] = $\underline{4}$ + $\underline{16}$ khar más 3 $\underline{3}$ hin [c]

[a] Por la línea 3 del Rollo de Cuero
[b] Aplicando el generador (1,3) a un resultado presente en el papiro Rhind.
[c] 1/48 de khar se transforma en hin teniendo en cuenta que 1 khar = 160 hin.

Al total parcial (½ khar) se llegaría sumando las partes del jefe y el escriba:

$$\underline{4} + \underline{8} + \underline{16} + \underline{32} \text{ khar más } 3\ \underline{3} + 1\ ⅔ \text{ hin}$$

y teniendo en cuenta que los 5 hin finales equivalen a 1/32 de khar.

Otro ejemplo aportado por Janssen se refiere al ostraca Gardiner 200[9]:

“6 khar 2 $\underline{2}$ oipe 6 ⅔ hin.
6 khar 2 $\underline{2}$ oipe 6 ⅔ hin.
6 khar 2 $\underline{2}$ oipe 6 ⅔ hin.
3 khar 1 $\underline{4}$ oipe 3 $\underline{3}$ hin.
1 khar 2 $\underline{2}$ $\underline{8}$ oipe 1 $\underline{2}$ $\underline{6}$ hin.
Total: 25 khar”.

En él se encuentran las tres primeras cantidades junto a la cuarta, que es la mitad de las anteriores, y una quinta que corresponde a la cuarta parte de las primeras. En efecto,

$$4 \text{ x } (1 \text{ khar} + 2\ \underline{2}\ \underline{8} \text{ oipe} + 1\ \underline{2}\ \underline{6} \text{ hin}) =$$
$$= 4 \text{ khar} + 10\ \underline{2} \text{ oipe} + 6\ ⅔ \text{ hin}$$

y como 1 khar = 4 oipe se obtendría la cantidad presentada en primer lugar. Por tanto, estas cantidades están en la relación (1, 2, 4) al modo de una progresión geométrica de razón 2, relación que debía ser frecuente en otros casos por los ejemplos que serán abordados en el siguiente epígrafe. Pues bien, lo que expone este ostraca es la solución a un problema de reparto desigual que podría formularse del siguiente modo:

> Dividir 25 khar entre cinco personas de manera que tres de ellas reciban el doble que la cuarta y ésta, a su vez, el doble que la quinta.

La solución consistiría, según el procedimiento visto anteriormente, en sumar las partes correspondientes:

$$4 + 4 + 4 + 2 + 1 = 15 \text{ partes}$$

dividiendo a continuación los 25 khar entre 15 para obtener la parte individual que, en particular, le corresponde a la quinta persona:

1	15
⅔	10

----
1 ⅔ 25

pero esta ración de 1 ⅔ khar debe expresarse por medio de ‘fracciones de Horus’ no resultando un trabajo sencillo que, por ello, explicaremos en detalle como una muestra del laborioso trabajo del escriba egipcio:

1 ⅔ khar = 1 khar 2 ⅔ oipe,
dado que 1 khar = 4 oipe.

La tarea ahora consiste en expresar estos ⅔ de oipe por medio de ‘fracciones de Horus’ en la medida de lo posible:

$$⅔ = \underline{3}\ \underline{3}\ [a] = \underline{4}\ \underline{12}\ \underline{4}\ \underline{12}\ [b] = \underline{2}\ \underline{6} = \underline{2}\ \underline{8}\ \underline{24}\ [c]$$

[a] Línea 7 del Rollo de Cuero.
[b] Línea 3 del Rollo de Cuero.
[c] Generador (1,3) presente en el papiro Rhind.

Con esto disponemos de la expresión:

1 khar 2 $\underline{2}$ $\underline{8}$ $\underline{24}$ oipe,

pero la última fracción ($\underline{24}$) no es deseable y, al tiempo, resulta difícil de expresar en función de las ‘fracciones de Horus’ por lo que se intenta reducirla a otra expresión equivalente en otra subunidad, teniendo en cuenta que 1 oipe = 40 hin. Para ello se multiplica $\underline{24}$ oipe por los 40 hin/oipe:

1 $\underline{24}$
2 $\underline{12}$
4 $\underline{6}$
8 $\underline{3}$
16 ⅔
32 1 $\underline{3}$
----
40 1 ⅔

pero ⅔ = $\underline{2}$ $\underline{6}$, como hemos deducido anteriormente, de donde se obtiene finalmente la expresión siguiente para la parte individual que luego habría que multiplicar por dos y por cuatro:

1 khar + 2 $\underline{2}$ $\underline{8}$ oipe + 1 $\underline{2}$ $\underline{6}$ hin

Problemas de ‘Pensar una cantidad’

Existe un conjunto de problemas en el papiro Rhind que suelen comenzar con una cantidad desconocida a la que se le añaden otras en función de la primera (eventualmente también cantidades independientes) para dar la suma de todas un total conocido. En estos problemas se ha querido ver el comienzo de un pensamiento algebraico aunque afirmarlo o no depende de lo que se entienda por ‘pensamiento algebraico’. Vamos a comenzar por uno de estos problemas que recordará inmediatamente a los problemas de reparto no tanto por la formulación verbal, que es algo diferente, pero sí por la situación planteada y por el procedimiento seguido en su resolución.

Rhind - Problema 34: “Una cantidad, $\underline{2}$ de ella, y $\underline{4}$ de ella, añadidas juntas, son 10. [¿Cuál es la cantidad?]”.

Que podría conocer la formulación equivalente:

10 panes se reparten entre 3 hombres de manera que el segundo recibe la mitad y el tercero la cuarta parte que el primero. ¿Cuánto recibe cada uno?

La solución sigue, como se ha comentado, los pasos hasta ahora conocidos. Se suman las partes correspondientes a las tres cantidades tomando a la primera como unidad,

$$1 + \underline{2} + \underline{4}$$

alcanzándose la cantidad tomada como unidad mediante la división 10 : 1

1	$1\ \underline{2}\ \underline{4}$	✓
2	$3\ \underline{2}$	
4	7	✓
$\underline{7}$	$\underline{4}$	✓
$2/7 = \underline{4}\ \underline{28}$	$\underline{2}$	
$\underline{2}\ \underline{14}$	1	✓

$5\ \underline{2}\ \underline{7}\ \underline{14}$	10	

Sin embargo, con planteamientos similares el escriba demuestra la posibilidad de elegir otro procedimiento distinto, el que luego se ha conocido como método de ‘falsa posición’ consistente en dar a la cantidad desconocida un valor hipotético (y conveniente operativamente) de manera que la comparación entre el resultado obtenido sobre él respecto al dado en el problema permita corregir la hipótesis planteada. Dos sencillos problemas permiten exponer este nuevo procedimiento con claridad.

Rhind - Problema 25: “Una cantidad con $\underline{2}$ de ella añadida es 16. [¿Cuál es la cantidad?]”.

Este nuevo problema de reparto no sigue el camino usual (sumar las partes 1 $\underline{2}$ para poder dividir 16 por dicha suma), sino que comienza por considerar para la cantidad desconocida una cantidad hipotética. Dado que dicha cantidad ha de dividirse luego entre 2 el escriba escoge el número par más sencillo, precisamente el 2 y realiza la operación planteada en el problema:

$$2 + \underline{2} \text{ de } 2 = 2 + 1 = 3$$

obteniéndose como resultado final 3, en vez de 16 que es la cantidad enunciada realmente en el problema. ¿Cómo corregir la hipótesis planteada? Probablemente este método de 'falsa posición' proviene de diversos tanteos con distintas cantidades que, en vez de ser aleatorios, intenta ser dirigido hacia la solución final. En otras palabras, si con 2 obtenemos finalmente 3, lo lógico es ir probando con números superiores (4 conduce a 6, 6 lleva a 9, etc.).

En algún momento los escribas observaron que existe la misma relación entre la cantidad hipotetizada y la cantidad final obtenida que entre la cantidad incógnita y el resultado 16:

Hipótesis	Resultado
2	3
4	6
6	9
8	12
10	15
?	16

Desde el punto de vista de las relaciones proporcionales podemos notar que la relación entre cada cantidad hipótesis y el resultado final es la misma (la segunda es vez y media la primera), es decir,

y, dado que existe una proporcionalidad directa entre ambos tipos de cantidades, también se verifica

relación que era utilizada directamente por el escriba en el método de 'falsa posición' por cuanto calculaba a continuación la relación marcada por la segunda razón por medio de la división 16:3

1	3	✓
2	6	
4	12	✓
⅔	2	
$\underline{3}$	1	✓
------------		
5 $\underline{3}$	16	

de modo que ahora esta cantidad se multiplica por 2 para obtener la cantidad desconocida:

$$2 \times 5\,\underline{3} = 10\ ⅔$$

La elección de la cantidad hipotética inicial dirigida a facilitar las operaciones subsiguientes también se hace evidente en el siguiente problema:

Rhind - Problema 24: “Una cantidad con $\underline{7}$ de ella añadida es 19. [¿Cuál es la cantidad?]”.

En este caso la cantidad escogida es 7 para que sea sencillo hallar la séptima parte:

$$7 + \underline{7} \text{ de } 7 \;=\; 7 + 1 \;=\; 8$$

para, a continuación, hallar la relación entre 8 y el resultado final de 19 dado en el problema:

1	8	
2	16	✓
$\underline{2}$	4	
$\underline{4}$	2	✓
$\underline{8}$	1	✓
$2\ \underline{4}\ \underline{8}$	19	

La cantidad incógnita se obtiene en definitiva multiplicando la escogida (7) por este factor:

1	$2\ \underline{4}\ \underline{8}$	✓
2	$4\ \underline{2}\ \underline{4}$	✓
4	$9\ \underline{2}$	✓
7	$16\ \underline{2}\ \underline{8}$	

Repartos en progresión

Algunos de los repartos tratados hasta ahora encierran una reconocible progresión geométrica entre las raciones que han de adjudicarse, como es el caso de la relación (1, 2, 4), pero también se han encontrado problemas donde se planteaba un reparto en el que los excesos (o diferencias) entre raciones fueran una cantidad fija, lo que representa una progresión aritmética. En este sentido, el papiro Rhind presenta dos problemas donde se tratan específicamente este último tipo de progresiones rebelando en su resolución la comprensión que tenía el escriba de la estructura interna y propiedades de estas progresiones.

Rhind - Problema 40: “[Dividir] 100 panes entre 5 hombres [de tal forma que las partes recibidas estén en progresión aritmética y que] de [la suma de] las tres partes mayores sea [igual a la suma de] las dos más pequeñas. ¿Cuál es el exceso [común o diferencia entre las partes]?”

El escriba utiliza en este problema el método de ‘falsa posición’ pero no sólo hace un supuesto sino dos, lo que complica la resolución. En efecto, una progresión aritmética de diferencia d con cinco términos tendría la expresión general:

$a \qquad a + d \qquad a + 2\,d \qquad a + 3\,d \qquad a + 4\,d$

de la que se sabe que la suma de las dos primeras es una séptima parte de la suma de las tres últimas.

Pero ahora las incógnitas son dos: La cantidad inicial (a) y la diferencia entre los términos (d). El escriba hace un primer supuesto de que la cantidad inicial es uno lo que resulta cómodo por cuanto todos los demás términos, que aparecen referidos a esta primera cantidad, se simplifican. Pero luego el escriba hace un nuevo supuesto consistente en que la cantidad diferencia es 5 ½ y ello ya no es aleatorio sino que verifica la condición dada en el problema. Así, la progresión

$$1 \qquad 6\tfrac{1}{2} \qquad 12 \qquad 17\tfrac{1}{2} \qquad 23$$

cumple que la suma de los dos primeros (7 ½) es la séptima parte de la suma de los tres últimos (52 ½). El cumplimiento de esta condición no es casual, naturalmente, sino que obedece a una buena elección de la cantidad diferencia (5 ½). ¿Cómo llega a elegirla así?

El escriba no da explicación alguna y los estudiosos actuales no se detienen en este detalle. La única explicación que podemos dar de esta elección tan oportuna es el conocimiento que tenía el escriba de las relaciones entre los términos de una progresión aritmética que, en términos actuales, podría consistir en partir de la progresión:

$1 \qquad 1 + d \qquad 1 + 2\,d \qquad 1 + 3\,d \qquad 1 + 4\,d$

La suma de los dos primeros sería 2 + d. Pues bien, siete veces esta cantidad (14 + 7 d) debe ser igual a la suma de los tres últimos (3 + 9 d):

$$14 + 7\,d \;=\; 3 + 9\,d$$

Si comparamos ambas expresiones observamos que el ‘exceso’ de un miembro se ha de compensar con el ‘exceso’ del otro o, en otras palabras, que

$$11 \;=\; 2\,d$$

de donde se concluye que la diferencia debe ser la mitad de 11, 5 ½ . Este razonamiento se ha hecho por claridad de exposición en términos actuales pero que el escriba no estaba lejos de él podrá observarse en el problema que analizaremos algo más adelante.

Pues bien, partiendo del doble supuesto realizado, la progresión de términos será

$$1 \qquad 6\tfrac{1}{2} \qquad 12 \qquad 17\tfrac{1}{2} \qquad 23$$

cuya suma es 1 + 6 ½ + 12 + 17 ½ + 23 = 60, de manera que, siguiendo el método de ‘falsa posición’, se halla la relación entre el total obtenido (60) y el que se debía obtener (100):

$$100 : 60 \;=\; 1\ \tfrac{2}{3}$$

que se multiplica por los términos de la progresión supuesta inicialmente para conformar la que soluciona el problema:

1 ⅔ 10 ⅔ $\underline{6}$ 20 29 $\underline{6}$ 38 $\underline{3}$

donde se ha multiplicado por 1 ⅔ no sólo los términos supuestos sino, consiguientemente, la diferencia (o ‘exceso’) entre ellos, que viene a ser de 9 $\underline{6}$.

El complejo conocimiento de la estructura interna de un caso de reparto según una progresión aritmética se observa más claramente en el

> **Rhind - Problema 64**: “Ejemplo de dividir excesos. Si te dicen: ‘Hay 10 heqat de cebada [para ser dividido] entre 10 hombres de tal forma que el exceso de cebada de cada hombre sobre el anterior sea $\underline{8}$ heqat. [¿Cuál es la parte de cada hombre?]”.

El escriba expone mediante una serie de cálculos en forma de reglas su comprensión de que la progresión de las cantidades supone:

- La existencia de 10 términos en la progresión.
- La existencia de 9 diferencias entre términos, cada una de $\underline{8}$ heqat.
- Que el producto entre el número de diferencias (9) y la diferencia ($\underline{8}$ heqat) conduce a la diferencia entre el primer y el último término.

A partir de observar estos hechos que el escriba manifiesta conocer el procedimiento para hallar la respuesta podría haber sido el de ‘falsa posición’ haciendo una hipótesis sobre la cantidad inicial (por ejemplo, la unidad como en el problema anterior) y comparando luego la suma de todos los términos con los 10 heqat que había que repartir. Sin embargo, el escriba prefiere otro método basado en el reconocimiento de que, a partir de una ración media existente hipotéticamente en el centro de la progresión, la mitad de las diferencias existentes en total se encuentran a un lado y la otra mitad al otro.

En otras palabras, calcula la ración media que correspondería en un reparto igualitario:

Ración media = 10 heqat / 10 hombres = 1 heqat

Ahora bien, como hay 9 diferencias, cada una correspondiente a $\underline{8}$ heqat la diferencia total entre el primer y el último hombre será de

9 x $\underline{8}$ heqat = 1 $\underline{8}$ heqat

Pero, a partir de la ración media, por encima estará la mitad de esta diferencia total ($\underline{2}$ $\underline{16}$ heqat), el último término se encontrará sumando ambas cantidades:

1 + $\underline{2}$ $\underline{16}$ heqat

obteniéndose las restantes mediante la sustracción sucesiva de $\underline{8}$ heqat (1 $\underline{4}$ $\underline{8}$ $\underline{16}$ heqat, 1 $\underline{4}$ $\underline{16}$ heqat, 1 $\underline{8}$ $\underline{16}$ heqat, 1 $\underline{16}$ heqat, etc.).

Para concluir con el conocimiento de las matemáticas egipcias de términos en progresión es obligado referirse al problema 79 del papiro Rhind en el que todo hace indicar que el escriba trabaja con una progresión geométrica, es decir, aquélla donde cada término se forma multiplicando por una cantidad fija al término anterior. El interés del escriba en las progresiones geométricas y, más en particular, en la suma de sus términos va a tener sus raíces en el método de duplicación característico de la multiplicación egipcia.

En efecto, la multiplicación por un número a cualquiera conduce a establecer la siguiente tabla de resultados:

1	a
2	2 a
4	4 a
8	8 a
16	16 a
32	32 a
....	

de modo que si se desea multiplicar a por 35, por ejemplo, el procedimiento se basa en la existencia de una sola descomposición de 35 en suma de términos de la columna izquierda:

$$35 = 32 + 2 + 1$$

y esto sucede para cualquier multiplicador, lo que lleva al escriba a interesarse por la suma de los términos de esta progresión geométrica de razón 2.

En concreto, colocando en una columna las sumas S_i con i = 1, 2, ... de los i primeros términos de esta progresión,

$\mathbf{a_i}$	$\mathbf{S_i}$
1	1
2	3
4	7
8	15
16	31
32	63
....	

obteniéndose cada suma multiplicando la anterior suma por la razón (2) y añadiendo uno, es decir, de forma general

$$S_i = 2 \times S_{i-1} + 1 \qquad \text{con } i = 1, 2, ...$$

A este respecto, el problema 79 del papiro Rhind va a mostrar un conocimiento aún más general de este resultado. Consiste en dos tablas de resultados, la primera de las que exponemos es la siguiente:

Casas	7
Gatos	49
Ratones	343
Espelta	2.401
Heqats	16.807

19.607

Esta tabla parece adoptar la forma de un juego que podría enunciarse así: ‘Hay 7 casas, en cada casa hay 7 gatos, por cada gato hay 7 ratones, cada ratón se come 7 raciones de espelta y por cada ración de espelta hay un heqat de grano ¿Cuántas cosas hay en total?’. Es decir, se ha formado una progresión geométrica de razón siete

Sin embargo, este simple ejercicio aparece en segundo lugar en el problema y como comprobación de los resultados encerrados en la siguiente tabla:

1	2.801
2	5.602
4	11.204
------------------.	
7	19.607

Es decir, un resultado aritméticamente tan simple como

$$7 \;\; x \;\; 2.801 \;\; = \;\; 19.607$$

se comprueba interpretando esta operación como la última fase del cálculo de la suma de una progresión geométrica de razón 7 en que cada suma de n términos se obtiene a partir de la suma de los (n - 1) anteriores. Esto requiere mayor explicación.

En la tabla de las casas, gatos y demás elementos la suma 19.067 se ha obtenido sumando los 5 primeros términos de la progresión mientras que en la otra tabla se presenta la suma de los cuatro primeros términos (con una pequeña modificación que ahora se comentará) multiplicándose por 7 para obtener de nuevo la suma de los cinco términos. La modificación consiste que en la tabla de las casas y gatos la suma de los 4 primeros términos es 2800 y no 2801 como aparece inicialmente en la otra tabla. En consecuencia, el escriba muestra que la forma de calcular una suma Sn de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón 7 se obtiene mediante la expresión:

$$S_i \;\; = \;\; 7 \;\; x \;\; S_{i\,-\,1} \;\; + \;\; 1 \qquad \text{con } i = 1, 2, ...$$

Aritmética generalizada

Respecto a la consideración de que los egipcios resolvieron problemas ‘algebraicamente’ se comentó en un epígrafe anterior que ella dependía de qué concepto de Álgebra se considerase. Es evidente que no cabe aplicar al escriba ninguna interpretación moderna basada en un lenguaje simbólico puesto que carecía por completo de él (y aún habrá que esperar hasta el trabajo de Diofanto para vislumbrar las primeras posibilidades que no fueron aplicándose hasta el siglo XVI). Por tanto, sin una notación simbólica adecuada ni siquiera cabe hablar de la interpretación diofantina del Álgebra sincopada o abreviada. El conocimiento algebraico del egipcio emplea un lenguaje retórico sobre un Álgebra que sólo puede tomarse como una aritmética generalizada[10]. Precisamente la ya comentada frase final que aparece en muchos problemas de recomendar hacer lo mismo en cualquier problema del mismo tipo está llamando precisamente a la generalización de los procedimientos a cualquier conjunto de números que se presente bajo la misma estructura de relaciones del problema.

Sin embargo, la característica esencial de esta interpretación del Álgebra como aritmética generalizada a la que prestaremos especial atención en los dos problemas siguientes es el hecho de que sólo se maneja una incógnita de manera que si el enunciado dice que se le hace una serie de operaciones aritméticas para obtener un resultado, la resolución consistirá en partir del resultado para, haciendo las operaciones contrarias en orden cambiado, ir ‘reconstruyendo’ la cantidad de partida.

> **Moscú - Problema 19**: “Ejemplo de calcular una cantidad tomándola 1 y $\underline{2}$ veces y añadiendo 4 para dar 10. ¿Cuál es la cantidad que hace esto?”

El procedimiento del escriba es el que se ha comentado. En concreto, sus acciones son las siguientes:

· Si en el último paso se ha añadido 4 para obtener el resultado 10 ahora se sustrae dicha cantidad, obteniéndose 10 - 4 = 6. La situación del problema se puede reformular así: ‘Calcular una cantidad tomándola 1 y $\underline{2}$ veces para dar 6. ¿Cuál es la cantidad que hace esto?’

· Si ahora la cantidad se ha repetido 1 y $\underline{2}$ veces (es decir, multiplicado por 1 $\underline{2}$) se ha de invertir el proceso multiplicando 6 por la cantidad inversa de 1 $\underline{2}$ que resulta ser ⅔:

· $6 \times ⅔ = 4$ es la solución.

La cuestión se complica si se desarrollan varias operaciones consecutivas sobre la incógnita puesto que entonces, antes de aplicar este procedimiento, se hace necesario reducir a operaciones aritméticas más simples las efectuadas inicialmente sobre la cantidad incógnita. Es el caso de

> **Rhind - Problema 28**: “[Si una cantidad] y ⅔ de la misma son añadidos juntos, y de la suma se resta $\underline{3}$ de la suma, queda 10. [¿Cuál es la cantidad?]”.

El escriba a continuación no hace sino comprobar la validez de la solución (9) volviendo a realizar las operaciones enunciadas en el problema para alcanzar el resultado final (10). Parece evidente que las operaciones sucesivas sobre la cantidad incógnita (como en el problema anterior multiplicar por 1 ⅔ pero luego restar una tercera parte de esta misma suma hacen inviable aplicar el procedimiento de ‘inversión de pasos’ sin reducir numéricamente las operaciones realizadas sobre la cantidad incógnita. Así, a la cantidad se la repite (se multiplica) el siguiente número de veces:

$$1\ ⅔ \text{ menos } \underline{3}\ (1\ ⅔)$$

que puede operarse, por ejemplo, así:

$$1\ ⅔ \text{ menos } (\underline{3} + \underline{6}\ \underline{18})$$

puesto que $\underline{3}$ de ⅔ = $\underline{6}\ \underline{18}$, resultando

$$1\ \underline{3} \text{ menos } \underline{6}\ \underline{18} = 1\ \underline{9}$$

de modo que el escriba calcula la inversa de 1 $\underline{9}$, es decir, 1 : 1 $\underline{9}$ = ⅔ $\underline{5}$ $\underline{30}$ para poder calcular la cantidad desconocida:

$$10 \times \tfrac{2}{3}\ \underline{5}\ \underline{30} = 9$$

Notas

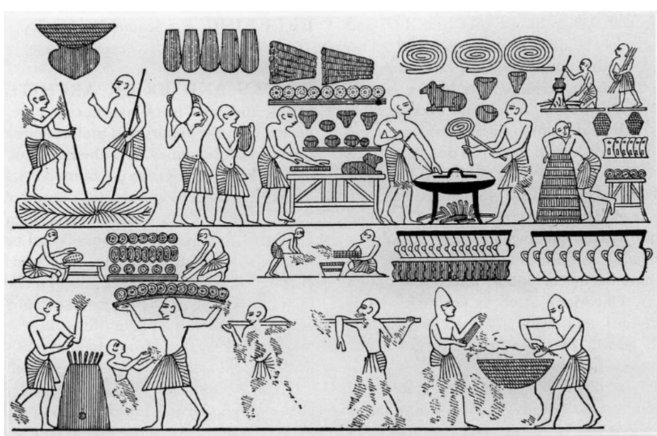
1 Menu, B. (1982): “Recherches sur l’histoire juridique, economique et sociale de l’Ancienne Egypte”.
2 Janssen, J.J. (1975): “Commodity prices from the Ramessid period”.
3 Gillings, R.J. (1972): “Mathematics in the time of faraons”, p. 125.
4 Kemp, B.J. (1996): “El Antiguo Egipto. Anatomía de una civilización”.
5 Cit. en Kemp, B.J. Op. cit. p. 160.
6 Cit. en Menu, B. Op. cit, p. 37.
7 Janssen, J.J. Op. cit.
8 Janssen, J.J. (1991): “Rations with riddles”, p. 93.
9 Janssen, J.J. (1992): “Rations with riddles II”, p. 81.
10 Usiskin, Z. (1988): “Conceptions of school Algebra and uses of variables”.

Capítulo 10
Fabricación del pan y la cerveza

En la panadería

El pan y la cerveza eran los alimentos básicos de la población del antiguo Egipto. Las dos viandas se fabricaban a partir del cereal recogido en las cosechas, si bien es cierto que el pan se solía elaborar con preferencia utilizando el llamado trigo- (una variedad de la espelta o escanda) mientras que la cerveza se conseguía a partir del grano de cebada, ambos cereales valorados de un modo similar[1]. De entrada hay que aclarar que si el pan fabricado entonces era en cierto modo similar al actual, la cerveza en cambio era una especie de pasta semi-líquida parecida a una pasta espesa que encerraba componentes parecidos a los del pan antes mencionado.

La fabricación del pan y la cerveza era una tarea cotidiana y presente en todos los períodos históricos estudiados. Había un lugar para esta tarea en muchas casas, particularmente entre la nobleza, lo que unido al hecho de que diversos modelos de madera y frescos se han encontrado en las tumbas, ha permitido reconstruir el hábitat donde tenía lugar el trabajo de los panaderos y cerveceros. Los modelos de la tumba de Meket-Re, un funcionario de la dinastía XI o las pinturas de la tumba del visir de la dinastía XII Intef-Iker y de la mastaba de Khentika ofrecen información suficiente[2] para describir el proceso seguido por los trabajadores de la época:



· A la panadería llegaba el grano íntegro de trigo o cebada por lo que la primera tarea consistía en su transformación en harina, lo cual no era sencillo habida cuenta de la inexistencia de molinos. El grano se colocaba, en primer lugar, en recipientes de caliza recibiendo los golpes propinados por un mortero de madera alargado que iban desprendiendo la cáscara del grano, el llamado cascabillo.

· La operación de moler se llevaba a cabo inmediatamente después, realizándose a mano, empuñando unas piedras con las que se golpeaba el grano hasta transformarlo en una harina gruesa. Esta tarea se realizaba sobre unas construcciones de adobe terminadas en piedra y colocadas de forma inclinada a fin de que la mezcla de harina y cascabillo fuera cayendo sobre una artesa.

· Lo que caía a dicha artesa era una mezcla de harina, restos de cascabillo y arenisca en que venía impregnado el grano inicial y que se ha encontrado en no pequeñas cantidades en panes que se han conservado de aquella época. Todo ello se cribaba entonces para separar los restos más grandes que pudieran permanecer.

· Una vez obtenida la harina sobre la que trabajar se introducía en unas grandes tinajas de manera que, añadiendo el agua oportuna, un hombre pudiera introducirse en ella pisoteando la masa que se formaba hasta que presentase la textura adecuada.

· A partir de este momento, la fabricación del pan y la cerveza diferían. Para el primero se tomaba la mezcla pisoteada y se amasaba dándole la forma requerida antes de proceder a hornearlo. Como alternativa se disponía de unos moldes de cerámica de forma cilíndrica o cónica dentro de los cuales la masa se introducía en el horno hasta llegar a su adecuado punto de cocción.

· La cerveza, en cambio, se disponía en forma de pastelillos que, una vez comenzados a fermentar, se introducían en grandes tinajas en las que se mezclaban con agua revolviéndose todo el contenido. Una vez hecho esto se dejaba fermentar un tiempo hasta que la cerveza así producida se vertía en jarras cuya boca se taponaba con barro fresco, pronto endurecido.

Pues bien, el proceso no podía ser controlado con exactitud por los escribas. Como afirma Kemp:

> "La elaboración del pan y la cerveza incluía elementos que imposibilitaban el control directo de las cantidades mientras iban pasando de una fase a otra. Se agregaba agua, la masa aumentaba de volumen, además se añadían otros productos como los dátiles, a la vez que se perdía una proporción de restos no comestibles durante la molienda y el tamizado"[3].

Ya que el escriba no podía controlar el proceso con minuciosidad sí podía considerar la relación entre los heqats de grano que entraban en la panadería o cervecería y el número de panes o de jarras de cerveza que se producían. Si con una cantidad determinada de grano se producían pocos panes la relación sería baja mientras que crecería en caso de ser un número mayor de panes aunque, previsiblemente, estos fueran de menor tamaño que los primeros. A esta relación se la denominaba ‘psw’ (pesu, en traducción de Gillings) y era, por tanto, una razón:

El pesu del pan determinaba básicamente su tamaño, como se ha dicho, mientras que el de la cerveza permitía determinar la fuerza de su contenido. Su valor era aproximadamente uniforme para períodos de tiempo cortos pero fue modificándose a lo largo de la historia egipcia. Así, el pesu de la cerveza en el papiro Bulaq 18 (Imperio Medio) era invariablemente de 2 mientras que en el Rhind (Segundo Período Intermedio) mostraba valores de 2 pero también de 2 ¾ y 5 y en una inscripción de Tutmosis IV en Karnak (Imperio Nuevo) el pesu de la cerveza se cifra en 4[4]. En general, el de la cerveza osciló a lo largo de este tiempo entre 2 y 5 mientras que el pesu del pan era más variable pudiendo presentar un valor comprendido entre el 5 y el 45.

El pesu es una magnitud intensiva, es decir, una magnitud que mide la ‘intensidad’ con que una magnitud se presenta en relación a otra. Su unidad, por tanto, no es simple, sino que viene expresada por un número de panes o jarras por heqat de grano. Es por tanto un valor unitario. Aunque más inusual, también era posible calcular la razón inversa (*hrt*), es decir, el número de heqats de grano existentes por pan o por jarra.

En líneas generales, los escribas se planteaban una serie de problemas en torno al pesu de la producción que conducían a su presencia tanto en el papiro Rhind como en el de Moscú y su agrupación en torno a varios tipos distintos:

· Era invariable en estos problemas el conocimiento de los heqats de grano que entraban así como el número de panes y de jarras que salían. El primer tipo de problemas por tanto se refería a conocer el pesu y su inversa (*hrt*) de la producción.

· El segundo grupo de problemas se refiere al cambio que pudiera efectuarse entre panes de distinto pesu (incluyendo varias clases de pesu), o panes con cerveza en las mismas circunstancias. Todo ello provenía del hecho de que las raciones estaban en general estandarizadas de manera que si a un trabajador le correspondían panes de pesu 6 pero los envíos eran panes de pesu 5 o cerveza de pesu 2 debía hacerse una correspondencia entre las viandas enviadas y la ración estandarizada de manera que se hallase con facilidad su equivalencia.

Conforme a ello se analizarán a continuación diversos problemas presentes en los papiros Rhind y Moscú que tratan fundamentalmente de estos dos tipos de problemas. En todos ellos se podrá observar el conocimiento que los antiguos escribas tenían de la proporcionalidad numérica y que ya hemos visto presente en sus métodos de resolución de otros problemas ya presentados.

Determinación del pesu

Los dos problemas del papiro Rhind en que se pide directamente la determinación del pesu son, a nivel matemático, una aplicación inmediata de la igualdad entre razones que caracteriza a la proporcionalidad directa entre las dos magnitudes en juego (harina medida en heqats y pan medido por su número de hogazas).

> **Rhind - Problema 69**: “3 $\underline{2}$ heqat de harina hacen 80 hogazas de pan. Calcularme la cantidad de harina en cada hogaza y su pesu”.

El pesu vendrá determinado por la división 80 : 3 $\underline{2}$ interpretada como la acción de contar desde 3 $\underline{2}$ hasta llegar a 80,

1	3 $\underline{2}$	
10	35	
20	70	✓
2	7	✓
⅔	2 $\underline{3}$	✓
$\underline{21}$	$\underline{6}$	✓
$\underline{7}$	$\underline{2}$	✓
22 ⅔ $\underline{7}$ $\underline{21}$	80	

de modo que el pesu del pan producido resulta ser de 22 ⅔ $\underline{7}$ $\underline{21}$. Ahora bien, si el pesu es la razón unitaria respecto a la unidad de harina (un heqat), se pide también la cantidad de harina en cada pan, es decir, la razón unitaria inversa respecto a la unidad de pan (la hogaza). El procedimiento será entonces el de plantear la división 3 $\underline{2}$: 80 pero como ello implicaría hallar fracciones muy pequeñas de 80 el escriba prefiere transformar los 3 $\underline{2}$ heqats de harina en su capacidad equivalente en ro de manera que, recordando que 1 heqat = 320 ro,

1	320	✓
2	640	✓
$\underline{2}$	160	✓
3 $\underline{2}$	1120 ro	

así que la división anterior adopta la forma de contar con 80 para llegar a 1120 ro:

1	80	
10	800	✓
2	160	
4	320	✓
14	1120 ro	

concluyéndose en que cada pan tiene 14 ro o, en otros términos, $\underline{32}$ heqat 4 ro.

> **Rhind - Problema 70**: “7 $\underline{2}$ $\underline{4}$ $\underline{8}$ heqat de harina hacen 100 hogazas. ¿Cuál es la cantidad de harina en cada hogaza y cuál es su pesu?”

Para hallar el pesu (la segunda tarea no se expondrá al ser similar a la anterior) hay que contar con 7 $\underline{2}$ $\underline{4}$ $\underline{8}$ para llegar a 100:

	1	7 $\underline{2}$ $\underline{4}$ $\underline{8}$	
	2	15 $\underline{2}$ $\underline{4}$	
	4	31 $\underline{2}$	✓
	8	63	✓
[a]	⅔	5 $\underline{4}$	✓
	$\underline{63}$	$\underline{8}$	
[b]	$\underline{42}$ $\underline{126}$	$\underline{4}$	✓
	12 ⅔ $\underline{42}$ $\underline{126}$	100	

que muestra un cálculo complejo desde el punto de vista de la operación sobre fracciones destacando dos puntos:

[a] ⅔ de 7 $\underline{2}$ $\underline{4}$ $\underline{8}$ = (⅔ de 7) + (⅔ de $\underline{2}$) + (⅔ de $\underline{4}$) + (⅔ de $\underline{8}$) = (3 $\underline{2}$ + 1 $\underline{6}$) + ($\underline{4}$ $\underline{12}$) + ($\underline{8}$ $\underline{24}$) + ($\underline{16}$ $\underline{48}$)

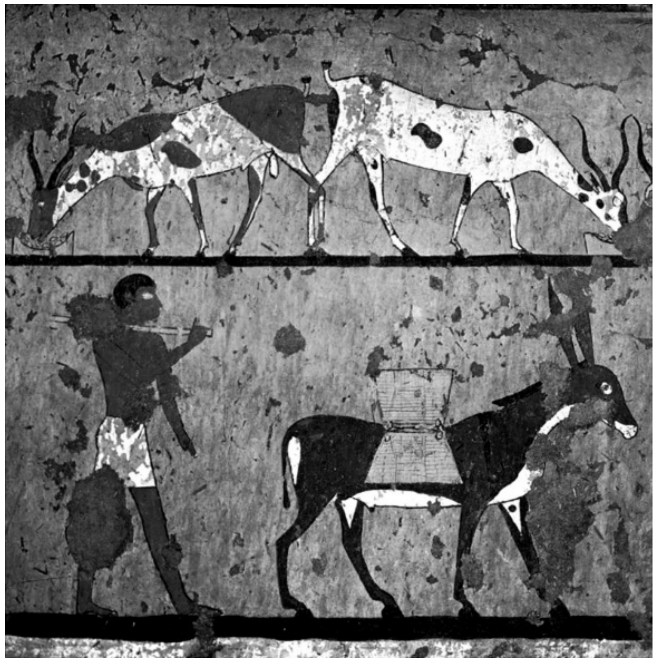
aplicando la regla 61B del papiro Rhind, de manera que utilizando esta vez las descomposiciones en sumas de fracciones,

⅔ de 7 $\underline{2}$ $\underline{4}$ $\underline{8}$ = 4 ⅔ + $\underline{3}$ + $\underline{6}$ + $\underline{12}$ = 5 $\underline{6}$ $\underline{12}$ = 5 $\underline{4}$

[b] 2/63 = $\underline{42}$ $\underline{126}$ según los resultados del Recto.

Aunque el siguiente problema se inscribe en un contexto diferente (la recolección de tasas en la ganadería) se trae aquí a colación por encerrar un cálculo proporcional que presenta una gran semejanza con el cálculo del pesu. Con su análisis podremos comprobar el dominio del escriba en este tipo de razonamiento sea cual sea la situación en que se aplique.

> **Rhind - Problema 67**: Cálculo del tributo [en ganado] de un vaquero. Ahora este vaquero viene al registro de tributos con 70 reses. El contador le dice al vaquero: ‘Claro, éste es un rebaño más pequeño que el que tienes que traer. ¿Dónde está el mayor número de reses que debes?’ El vaquero le responde: ‘Lo que he traído es ⅔ de $\underline{3}$ del ganado que me entregaste. Cuéntalo y encontrarás el número completo que traigo’”.



Por el texto se puede deducir que, como en el caso del pesu, se adopta un enfoque funcional de la proporcionalidad numérica, considerando una relación entre dos magnitudes G (reses en total) y T (reses dadas en concepto de tributo):

$$f : G \rightarrow T$$
$$\tfrac{2}{3} \text{ de } \underline{3}\ (g) = t$$

de modo que los datos del problema plantean

$f(1) = \tfrac{2}{3}$ de $\underline{3} = 2/9 = \underline{6}\ \ \underline{18}$ (Por el Recto)
$f(?) = 70$

y la proporción presente será:

de donde

que es lo que hace el escriba invirtiendo, en primer lugar, $\underline{6}\ \ \underline{18}$:

$$\begin{array}{ll}
1 & \underline{6}\ \underline{18} \\
2 & \underline{3}\ \underline{9} \\
4 & \tfrac{2}{3}\ \underline{6}\ \underline{18} \quad \checkmark \\
\underline{2} & \quad \underline{12}\ \underline{36} = \underline{9} \quad \checkmark \\
\hline
4\ \underline{2} & \quad \tfrac{2}{3}\ \underline{6}\ \underline{9}\ \underline{18} = 1
\end{array}$$

con lo que la solución final viene dada por

$$? \ = (4 \ \underline{2}) \times 70$$

1	70	
2	140	
4	280	✓
$\underline{2}$	35	✓
--------------		
4 $\underline{2}$	315 reses	

Cambio de panes y cervezas de distinto pesu

El segundo gran bloque de problemas relacionados con el pesu consisten, como se ha comentado antes, en hacer cambios entre panes y cerveza o de panes entre sí pero caracterizados por el distinto pesu presentado. Un problema elemental en este sentido es el siguiente:

> **Rhind - Problema 77**: "Ejemplo de cambio de cerveza por pan. Si te dicen: '10 jarras de cerveza [de pesu 2] son cambiadas por [hogazas de pan de pesu] 5'. [Encontrar el número de hogazas]".

El razonamiento del escriba empieza por considerar en primer lugar la cerveza: Si se conoce el pesu y el número de jarras es posible calcular la harina empleada

dándose inmediatamente la respuesta de 10/2 = 5 heqat de harina empleados, los mismos que deben estar presentes en la fabricación del pan correspondiente de pesu 5:

que conducen a la solución final de

$$5 \times 5 = 25 \text{ hogazas de pan.}$$

Algo más complejo desde el punto de vista operativo resulta el cambio que debe efectuarse entre dos clases de pan de distinto pesu:

> **Rhind - Problema 75**: "155 hogazas de [pesu] 20 son cambiadas [por hogazas] de pesu 30. [¿Cuál es el número de hogazas?]".

Para el que el procedimiento es el mismo comenzando por la determinación de la cantidad de harina que será común a ambas composiciones de hogazas pero deducida a partir de la primera por medio de la división 155 : 20

1	20	✓

2	40	✓
4	80	✓
$\underline{2}$	10	✓
$\underline{4}$	5	✓
-------------		
7 $\underline{2}$ $\underline{4}$	155	

así que multiplicando estos 7 $\underline{2}$ $\underline{4}$ heqats de harina por el pesu 30 de la segunda clase de pan:

1	7 $\underline{2}$ $\underline{4}$	
2	15 $\underline{2}$	✓
4	31	✓
8	62	✓
16	124	✓

30	232 $\underline{2}$ panes de pesu 30	

En este análisis de los diversos procedimientos empleados por los escribas en la resolución de los problemas de pesu, particularmente cuando se cambian unos panes por otros de distinto pesu, destaca la originalidad del método empleado en el

> **Rhind - Problema 72**: "Ejemplo de cambiar unas hogazas por otras. Tienes 100 hogazas de [pesu] 10 para ser cambiadas por algún número de hogazas con [pesu] 45. [¿Cuántos de estos habrá?]".

Sólo recordaremos que el procedimiento habitual consiste en hallar la cantidad de harina empleada en los panes de los que se conoce su número de hogazas (100 : 10 = 10 heqats) para a continuación multiplicarlo por su pesu (10 x 45 = 450 hogazas). En esta ocasión, sin embargo, el escriba hace algo distinto que transcribiremos para su mejor examen:

> "Calcula el exceso de 45 sobre 10; es 35. Multiplica 10 hasta llegar a 35; es 3 $\underline{2}$. Multiplicar 100 por 3 $\underline{2}$; es 350. Añadir 100 a esto; es 450. Decir entonces que 100 hogazas de [pesu] 10 son cambiadas por 450 hogazas de [pesu] 45, teniendo en harina 10 heqat".

Es evidente que el escriba realiza una descomposición del pesu final en dos partes,

$$45 \;=\; 10 + 35$$

la primera de las cuales coincide con el pesu inicial. Sin embargo, esta operación no responde inmediatamente a una acción física por cuanto podría pensarse en una separación de la harina o incluso de los panes resultantes pero el pesu es una razón y, como tal, sólo se puede separar numéricamente, sin que haya un referente físico inmediato que acompañe dicha operación.

Ello respondería asimismo a la idea (alcanzada de manera más o menos intuitiva por el escriba) de que la proporcionalidad directa se podría aplicar a dos magnitudes: El pesu P y el número de hogazas H de manera que la relación funcional entre las cantidades de ambas magnitudes se conservara:

```
P              H
-----------------------
10     →     100
35     →      ?
-----------------------
10 + 35  →     100 + ?
```

De entrada el escriba estaría aplicando la propiedad característica de la proporcionalidad directa por la que si se consideran dos valores x, y de P,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Por otro lado le sería necesario aplicar un operador funcional a los valores del pesu para obtener el correspondiente valor en hogazas. El que utiliza el escriba y por el que opera 35 para obtener el número de hogazas asociado, es de 1/10 x 100 que, previsiblemente, se construiría a partir del siguiente razonamiento:

Número Hogazas = Pesu x (Heqats de harina) =
= Pesu x (Hogazas/Pesu) = Pesu x (100/10)

Es evidente que los egipcios no disponían de ningún lenguaje simbólico para expresar las relaciones de proporcionalidad que manejaban con soltura en estos problemas pero al examinar algunas de sus soluciones se hace inevitable pensar que transformaban, posiblemente de manera mental, unas relaciones numéricas en otras independientemente del referente físico al que pudieran corresponder. Esto se aprecia igualmente en un problema más sencillo como

Moscú - Problema 20: Ejemplo de cálculo de 1000 hogazas de pan de pesu 20.
Si te dicen: '1000 hogazas de pan de pesu 20 en trigo. [Sabiendo que un heqat de trigo son 2 ⅔ heqat de cebada] calcular el valor del trigo [en cebada]".

Aunque el enunciado es poco comprensible, lo que se está pidiendo a partir de la equivalencia entre la harina del trigo y la de la cebada es a cuánta cebada equivale la harina de trigo encerrada en las 1000 hogazas de pan de pesu 20.

Si se quisiera que la operación matemática reflejara los referentes físicos y las acciones efectuadas sobre ellos, tendríamos que empezar por considerar que 1000 hogazas de pesu 20 dan lugar a una cantidad de harina (1000 : 20 = 50 heqat de trigo). A partir de ahí esta harina se transformaría en la de cebada multiplicando por 2 ⅔.

Sin embargo, el escriba realiza las operaciones aritméticas en un orden diferente. En primer lugar, cuenta con 20 hasta llegar a 2 ⅔

```
   1     20
   2      10
   10      2    ✓
   30      ⅔    ✓
   -------------
10 30     2 ⅔
```

Expresándose

$$\underline{10}\ \ \underline{30} = \tfrac{2}{3} \text{ de } \underline{5}$$

de manera que la solución sea

$$(\tfrac{2}{3} \text{ de } \underline{5}) \times 1000 = 133\ \underline{3} \text{ heqat de cebada}$$

Obsérvese, no obstante, que al realizar las operaciones en otro orden, los referentes físicos desaparecen. Por ejemplo, 2 ⅔ corresponde a los heqats de cebada por heqat de trigo por lo que la multiplicación de un número de heqats de trigo por 2 ⅔ tiene un sentido preciso mientras que la división de 2 ⅔ por el pesu carece de un referente inmediato. Desde el punto de vista operativo, sin embargo, el escriba parece preferir multiplicar por las 1000 hogazas al final pero para conseguirlo realiza las operaciones en otro orden considerando la medida de las cantidades (los números implicados) como tales números antes que como medida de magnitudes físicas que se han de relacionar de un modo transparente respecto a los referentes de que proceden. Las transformaciones operativas propias de la proporcionalidad numérica, pues, no parecen tener grandes secretos para los escribas.

Cambio por varias clases de pan y cerveza

Hemos visto cómo un número determinado de hogazas de pesu dado se cambiaban por otras hogazas de pan de distinto pesu, pero en los problemas que siguen el escriba da un paso más planteando el caso de que el cambio se efectúe en varias clases de pan o parte en pan y otra parte en cerveza de distinto pesu. Surge así una variedad de situaciones de una gran riqueza respecto a la estructura de proporcionalidad que las fundamenta y que comenzaremos exponiendo a partir de un caso relativamente sencillo:

> **Rhind - Problema 74**: "1000 [hogazas] de [pesu] 5 son cambiadas, [la mitad] con [hogazas de pan de pesu] 10 y [la otra mitad] con [hogazas de pesu] 20. ¿Cuál es el cambio?"

El método de resolución pasa, en primer lugar, por hallar el número de heqats utilizados en las 1000 hogazas iniciales:

$$\text{Pesu } 5 = 1000 / H \quad \text{de donde} \quad H = 200 \text{ heqats}$$

con lo que, siguiendo textualmente las acciones registradas en el problema, se considera la mitad de esta harina (100 heqats) para fabricar panes de pesu 10 y otro tanto para formar panes de pesu 20:

- 100 heqats x 10 = 1000 panes de pesu 10.
- 100 heqats x 20 = 2000 panes de pesu 20.

El siguiente problema tiene una estructura similar al anterior pero en este caso se ignora el número de hogazas que se producirán.

> **Rhind - Problema 76**: “1000 hogazas de [pesu] 10 son cambiadas por un número de hogazas de [pesu] 20 [y el mismo número] de [pesu] 30. [¿Cuál es el número?]”.

Lo más característico de este problema, sin embargo, es que el procedimiento del escriba aborda la cantidad de harina utilizada por unidad de cada clase de pan. Esta apelación al valor unitario no toma la forma que sería más esperable, la siguiente:

En primer lugar se calcularía la harina necesaria para tener 1000 hogazas de pesu 10, fácilmente calculable:

1000 hogazas / 10 = 100 heqats

Si se fabrican panes de pesu 20 (clase A) y de pesu 30 (clase B), cada pan de estas clases será producido, respectivamente, por 1/20 y 1/30 de heqat. Si sumamos ambas cantidades tendremos los heqats utilizados en un pan clase A y un pan clase B:

1/20 + 1/30 = 1/12 heqat

Pues bien, como eran 100 heqats los disponibles y 1/12 heqat produce un par de panes (uno de cada clase), habrá un total de 1200 panes de cada clase.

El escriba modifica a nivel operativo estos cálculos de forma que, aunque la estructura de la resolución sea la misma, prefiere no trabajar con fracciones tan pequeñas sino con números enteros, de manera que las fracciones 1/20 y 1/30 las expresa respecto de la unidad 1/30 como 1 ½ (ya que 1 ½ x 1/30 = 1/20) y 1 (puesto que 1 x 1/30 = 1/30). Así, la suma de fracciones se transforma en

1 ½ + 1 = 2 ½

respecto a lo cual hace un reparto de las 30 unidades de 1/30 que ha tomado en sustitución de la unidad original de un heqat

30 : 2 ½ = 12

que es lo que se multiplica por los 100 heqats de harina disponibles:

12 x 100 heqats = 1200 panes de cada clase

En el siguiente caso 15 heqat de grano se van a repartir, en este caso en un número conocido de hogazas de pan y jarras de cerveza, de forma que no se conoce el pesu de cada producto pero sí la relación que hay entre ellos. Podemos así observar la variedad de posibilidades que se plantean los escribas de la época.

Moscú - Problema 24: “Ejemplo de calcular con 15 heqat de grano del Alto Egipto. Si te dicen: ‘[Hay] 15 heqat de grano del Alto Egipto para hacer 200 hogazas de pan. El resto [es para hacer] 10 jarras de cerveza de pesu $\underline{10}$ del [pesu] del pan... [¿Cuál es el pesu del pan y la cerveza?]”.

Lo que pretende el escriba en su resolución es igualar los 15 heqats de que se parte a la harina necesaria para la fabricación de estos panes y cervezas. Así, partirá del hecho de que la harina es igual a la razón expresada por el cociente Jarras u Hogazas / Pesu de modo que, suponiendo que el pesu del pan es la unidad,

que son exactamente las operaciones realizadas por el escriba: Primero, hallar la inversa de 1/10 y luego multiplicar el resultado (10) por el número de jarras (10) de pesu 1/10 para obtener así el número de hogazas equivalentes de pesu 1 (100). Como 10 jarras de pesu 1/10 equivalen a 100 hogazas de pesu 1 ya puede considerar que el total producido es equivalente a

$$100 + 200 \quad = \quad 300 \text{ hogazas de pesu } 1$$

que, si se dividen por los 15 heqat disponibles darán lugar al pesu real del pan producido:

$$300 : 15 \;=\; 20 \text{ de pesu}$$

con lo que el pesu de la cerveza será su décima parte, 2.

Concluiremos con un problema donde el escriba reparte una cantidad de grano entre hogazas de pan y hasta tres clases de cerveza diferentes.

Moscú - Problema 13: “Calcular con [16] heqat de grano del Alto Egipto para el pan y la cerveza. Si te dicen: ‘[Tienes] 16 heqat de grano del Alto Egipto; calcula la cantidad para 100 hogazas de pan de pesu 20, [dejando] el resto para cerveza de pesu 2, de pesu 4 y de pesu 6...’”.

El primer paso es hallar el número de heqat que corresponden al pan que debe producirse:

$$100 / 20 \quad = \quad 5 \text{ heqat}$$

que pueden deducirse de los 16 iniciales hasta dejar el problema reducido a repartir 11 heqat de grano proporcionalmente entre los pesus 2, 4 y 6 correspondientes a las cervezas. Ello se hace de la forma habitual, sumando el total de partes en que repartir el grano disponible:

$$2 + 4 + 6 \quad = \quad 12 \text{ partes de pesu unitario}$$

de modo que ahora se divide 11 : 12 contando con 12 hasta alcanzar 11,

$$\begin{array}{rll}
 & 1 & 12 \\
 & \underline{2} & 6 \\
 & \underline{4} & 3 \\
 & \underline{12} & 1 \\
 & \underline{6} & 2 \\
 & \text{-------------} & \\
\frac{2}{3}\ \underline{4} = \underline{2}\ \underline{6}\ \underline{4} & & 11
\end{array}$$

Esta cantidad debe entonces multiplicarse por los pesus que correspondan a cada tipo de cerveza:

- 2 x ⅔ $\underline{4}$ = 1 $\underline{2}$ $\underline{3}$ = 1 ⅔ $\underline{6}$
- 2 x 1 ⅔ $\underline{6}$ = 3 ⅔
- 1 ⅔ $\underline{6}$ + 3 ⅔ = 5 $\underline{3}$ $\underline{6}$

Notas

1 Janssen, J.J. (1975): “Commodity prices from the Ramessid period”.
2 Kemp, B.J. (1996): “El Antiguo Egipto. Anatomía de una civilización”.
3 Ibid, p. 156.
4 Peet, T.E. (1923): “The Rhind mathematical papyrus”.

Capítulo 11
Cálculos sobre graneros y pirámides

Forma y tamaño de los graneros

En las Admoniciones de Ipu-ur, durante el Primer Período Intermedio, el que probablemente fuera un miembro de la nobleza menfita se lamenta de muchas cosas, entre ellas del hambre que se padece en el país:

> "Mira, [la gente se come] la yerba, lavada con agua. Ni fruta ni yerba se encuentran [para] las aves... es arrebatado de la boca de los cerdos. Ningún rostro brilla... por el hambre. Mira, el cereal ha desaparecido de todas partes... Todos exclaman: '¡No hay nada!' El almacén está vacío, y su guardián está tendido en el suelo"[1].

Hay numerosos testimonios sobre distintas hambrunas que recorrieron Egipto en distintos momentos de su historia. Ante la necesidad de alimentar a toda la población bajo su cargo tanto los poderes más amplios (el propio Faraón, el Visir, el Guardián del Doble Granero, etc.) como los locales (en concreto, los nomarcas) asumen esa responsabilidad y mandan escribir con orgullo una fórmula probablemente estereotipada en sus tumbas: "He dado pan al hambriento". El modelo económico redistributivo que se expuso en el tercer capítulo tiene como uno de sus pilares fundamentales la acumulación de grano bajo el control de la autoridad pertinente al objeto de garantizar su suministro para todas las familias de un nomo o de una ciudad. Es evidente que este suministro no siempre fue lo suficientemente fluido en tiempos de necesidad, sea por falta de previsión de las autoridades, inundaciones o sequías imprevisibles, guerras, pérdida de autoridad central, entre otros motivos. No obstante, también es indudable que, en tiempos ausentes de tales contingencias, el almacenamiento de grano era una actividad sobre la que pivotaba la economía egipcia, en primer lugar porque provenía de los tributos recaudados en los campos tras la cosecha, y en segundo lugar porque el reparto de ese grano constituía el fundamento del reparto de raciones entre los trabajadores para los poderes locales o generales.

Pues bien, el noble encargado de la construcción de los graneros y los escribas a sus órdenes que debían realizar los cálculos oportunos, habrían de tener en cuenta distintos factores a la hora de hacer dicha construcción. En primer lugar, el número y tamaño de los graneros para poder almacenar el grano necesario para la manutención cotidiana de los habitantes de una ciudad dejando margen suficiente para casos de necesidad. De hecho, se han encontrado varios graneros en alguna ciudad lo que parece contrastar con la existencia de un gobierno único que sólo necesitaría la construcción de uno. Ello se ha interpretado como evidencia de un almacenamiento correspondiente a distintas clases sociales[2] aunque también puede deberse, simplemente, a la construcción sucesiva de graneros acorde con un crecimiento de la población.

Graneros del Ramesseum

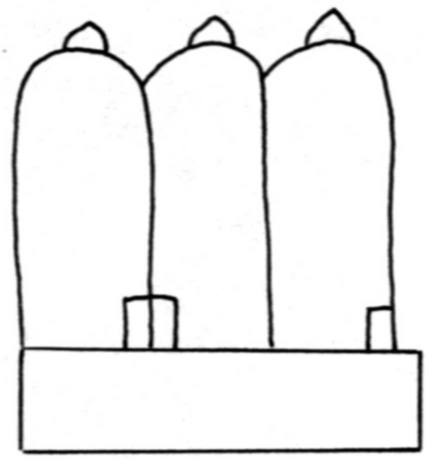
En cualquier caso, los escribas debían calcular las raciones necesarias en forma de heqats de grano de manera proporcional al número de habitantes de dicha ciudad y, conforme a esa cantidad de grano, diseñar el tamaño del granero necesario en cada caso. De hecho, actualmente los investigadores han realizado el cálculo en sentido contrario: Midiendo la capacidad de los graneros y suponiendo una ración media (en lo que no hay completa unanimidad) se puede realizar hipótesis sobre la población correspondiente.

Los cálculos del volumen de un granero y de su correspondiente capacidad, en consecuencia, son materia de trabajo para los escribas y es por ello que en diversos papiros de la época (el Rhind, los papiros de Kahun) se encuentran problemas y reglas de actuación referentes a la construcción y medida de estos graneros. Todos ellos se centran en graneros de base cuadrada, rectangular o circular y de paredes verticales por lo que la forma que adoptan es la de un cubo, un paralelepípedo o un cilindro. Sin embargo, se puede sospechar que la realidad fuera más rica y variada en posibilidades teniendo en cuenta la obligada simplificación a que se veían obligados estos papiros destinados sobre todo a la enseñanza de estudiantes a los que se les debían plantear casos sencillos en su aprendizaje.

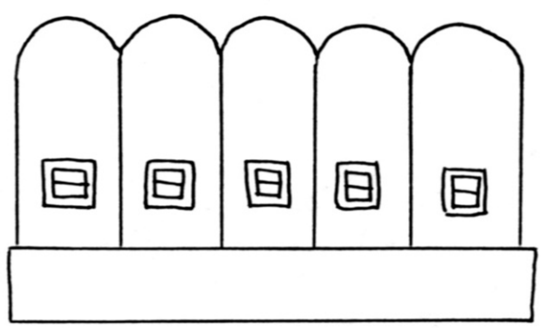
En las mastabas de muchos nobles se muestran escenas de la vida cotidiana de manera que, junto a la cosecha y limpieza del grano, también se dibujan graneros que han dado una considerable información sobre la forma e incluso el tamaño de estos almacenes, así como su evolución a lo largo de la historia egipcia. Aunque ahora vamos a examinar los modelos más frecuentes se puede adelantar ya que las formas son, en líneas generales, ajustadas a las planteadas en los papiros pero lo que simplifica considerablemente el cálculo de los problemas planteados son las dimensiones que debieron mostrar una variación mayor que los números tan cómodamente preparados que aparecen en los papiros.

En el Imperio Antiguo hay sobre todo dos formas de graneros: Los ‘silos’ y la ‘torre de cuatro montantes’[3]. Los primeros son cilindros terminados en una pequeña cúpula en los que la altura duplica o triplica el diámetro (muy distintas dimensiones de las presentadas en el papiro

Rhind en los que la altura nunca supera ese diámetro) y que se levantan encima de una plataforma que puede llegar a significar la tercera parte de la propia altura del silo destinada a aislar de la humedad y los animales el grano almacenado.

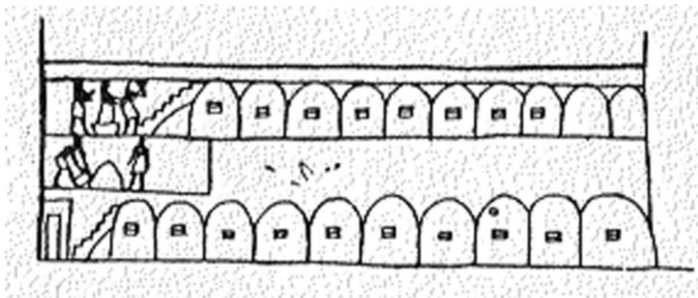


Los segundos graneros vienen a constituir la agrupación de tres o cuatro silos juntos, aunque podían llegar hasta veinte, con una base cuadrada o circular y cubiertos por unas bóvedas planas.



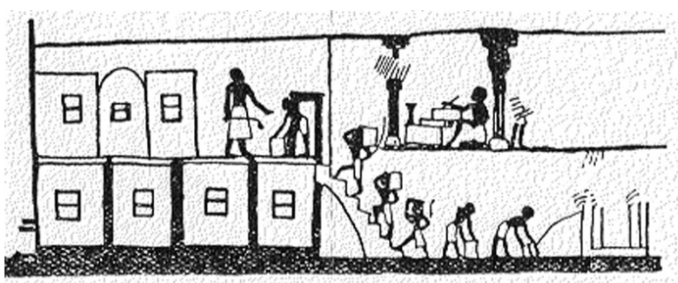
Se puede estimar que su altura se acercaría a los tres codos aunque ello se ha deducido por el tamaño de algunas figuras humanas que aparecen a su lado y ello no es del todo fiable. En ocasiones estos graneros aparecen precedidos por arcos y columnas integrando un pórtico en que, por el contenido de las pinturas, se apilaba y medía el grano antes de su almacenamiento definitivo.

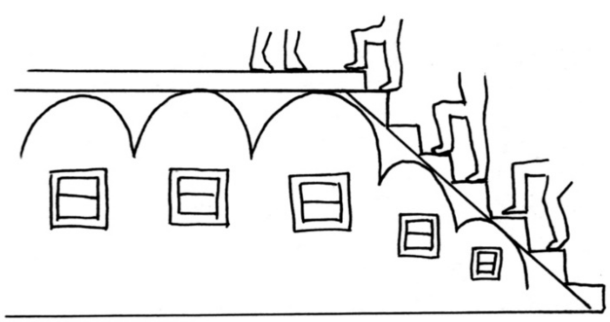
El Imperio Medio conoce algunas modificaciones que son más interesantes de contrastar con el contenido del papiro Rhind y del Kahun por corresponder al mismo período. Las pinturas funerarias muestran que los silos son más estilizados llegando su altura a quintuplicar el diámetro y alcanzando los 6 ½ codos en las fortalezas de Nubia y los menores 4 ½ codos en los graneros de la ciudad de Kahun[4]. Sin embargo, también se encuentran graneros aparentemente más ajustados a las cortas alturas presentes en el papiro Rhind, normalmente agrupados en una construcción protegida por un muro, separadas las dos filas de graneros por un patio y con distintas escaleras que muestran una altura del granero poco más alta que la de un hombre.



Las formas vuelven a ser la de los silos antiguos o bien adoptan la figura del paralelepípedo de base cuadrada o rectangular (figura en la siguiente página). Recuérdese que un paralelepípedo es un prisma con sus bases formadas por paralelogramos.

Finalmente, el Imperio Nuevo no presenta grandes novedades persistiendo los graneros del tipo 'silo' en pequeños grupos (de dos a cinco) así como silos consecutivos abovedados y cubiertos por un techo plano que permite su fácil acceso al tiempo que, construidos con un perfil rebajado, facilitan la construcción de escaleras de acceso, como sucede en el Ramesseum.





Así pues y de cara a los problemas que abordaremos seguidamente se puede concluir que, en líneas generales, la preparación que suponen los problemas presentes sobre todo en el papiro Rhind permitía enfrentarse a los tipos más habituales de granero si bien se puede sospechar que los datos numéricos aparecían en estos papiros considerablemente simplificados al objeto de que el escriba aprendiz se fijara más en el procedimiento a seguir que en las dificultades de cálculo que pudieran presentarse.

Los graneros de base rectangular

Los cuatro problemas que serán tratados en este epígrafe corresponden a graneros de base rectangular (en particular cuadrada para los tres primeros) y en los que se plantean diversas incógnitas que debían constituir los tipos de problemas más usuales:

- Dadas las dimensiones del granero, averiguar su capacidad en heqats de grano.
- Dadas la capacidad y las dimensiones de la base encontrar la altura del granero que permite almacenar el grano requerido.
- El último problema es una variación algo más compleja del tipo anterior por cuanto se enuncian, junto a la capacidad, las relaciones aritméticas entre los lados de la base antes que sus dimensiones mismas que deben deducirse.

> **Rhind - Problema 44**: "Ejemplo de calcular [la capacidad de] un granero rectangular, siendo su longitud 10, su anchura 10 y su altura 10. ¿Cuál es la cantidad de grano que cabe en él?"

Resulta esencial para la comprensión de los cálculos subsiguientes recordar las relaciones enunciadas en el capítulo 4 en torno a las medidas de capacidad. Resultará que

1 khar = 5 heqat-cuádruples = 20 heqat = 200 hin

siendo además

$$1 \text{ khar} = \tfrac{2}{3} \text{ codo cúbico}$$

así como

$$1 \text{ codo cúbico} = 1\tfrac{1}{2} \text{ khar}$$

Pues bien, el escriba calcula el volumen del granero cúbico planteado en el problema sin más que multiplicar entre sí sus tres dimensiones:

10codos x 10codos x 10codos = 1.000 codos cúbicos

transformando entonces la medida de volumen en la correspondiente de capacidad:

$$1.000 \times 1\tfrac{1}{2} = 1.000 + \tfrac{1}{2}\,1.000 = 1.500 \text{ khar}$$

que, para transformarlos en heqat-cuádruples, la unidad más habitual de capacidad, bastaría multiplicarla por 5, operación que el escriba suele realizar dividiendo por 20 (para obtener 'cientos' de heqats-cuádruples) y multiplicando finalmente por 100:

1500 khar = 1/20 x 1500 x 100 = 7500 heqats-cuádruples

Rhind - Problema 45: “Un granero [rectangular] en el que caben 7.500 heqats-cuádruples de grano. ¿Cuáles son sus dimensiones?”

Evidentemente, éste es el problema inverso del anterior, sobre todo porque se supone (dada la resolución del escriba) que la base del granero es cuadrada y coincide en dimensiones con el del problema anterior. Se realizan los mismos cálculos, salvo que están en orden cambiado, por lo que no insistiremos tanto en el procedimiento aritmético como en el tipo de problema (siendo la incógnita la altura del granero), que vuelve a presentarse en el

Rhind - Problema 46: “Un granero [rectangular] en el que caben 2.500 heqats-cuádruples de grano. ¿Cuáles son sus dimensiones?”

De nuevo supone el escriba Ahmose que laas dimensiones cuadradas de la base son de 10 por 10 codos, coincidiendo las operaciones realizadas con las presentes en el problema anterior. Así, se toman 25 ‘cientos’ de heqats-cuádruples multiplicando por 20 para obtener un total de 500 khar de grano.

El siguiente paso supondría multiplicar el número de khar (500) por ⅔ a fin de convertir la capacidad enunciada en el volumen correspondiente en codos cúbicos que, divididos finalmente por 100 (10 x 10) diera el valor de la altura buscada teniendo en cuenta que, dadas las dimensiones de la base,

10 codos x 10 codos x h codos = 500 khar.

Sin embargo y, como en otras ocasiones, el escriba cambia el orden de las operaciones para facilitar su cálculo: Divide en primer lugar entre 100 (lo que el escriba realiza dividiendo dos veces por 10) para luego multiplicar por ⅔ alcanzando así la altura que es de 3 1/3 codos.

Kahun LV.4 - Líneas 30-42: [En un granero rectangular, el lado es $\underline{2}$ $\underline{4}$ del frente. 40 cestas de 90 hin lo llenan con una profundidad de 1 codo. Encontrar el lado y el frente].

El escriba, en este caso, se dedica en primer lugar a determinar la capacidad del granero rectangular mediante la siguiente sucesión de transformaciones:

90 hin = 1/10 x 90 heqat = 9 heqat

que a continuación multiplica por el número de cestos que caben en él: 40 x 9 = 360 heqats. Como cada codo cúbico equivale a 30 heqats, habrá que dividir por 30 para obtener

1/30 x 360 = 12 codos cúbicos

siendo éste precisamente el problema planteado y resuelto en el capítulo 6 al tratar del cálculo de superficies rectangulares. Ello muestra que algunos de aquellos problemas tenían una extensión a tres dimensiones a través del cálculo de volúmenes. Lo mismo sucederá en los graneros de base circular para los que se aplicarán los métodos aproximativos entonces analizados para determinar la superficie circular que constituye, en este caso, la base del ‘silo’ cilíndrico.

Los graneros de base circular

Hay sólo tres problemas en el papiro Rhind que abordan el cálculo de la capacidad de graneros cilíndricos. En todos ellos el primer paso en su resolución consiste en calcular la superficie de la base circular mediante el procedimiento aproximativo que hemos examinado en el capítulo 6 y que se vuelve a mostrar brevemente aplicándolo al

> **Rhind - Problema 41**: "Ejemplo de hacer un granero redondo [cilíndrico] de [diámetro] 9 y [altura] 10".

La superficie circular de la base se halla siguiendo los pasos:

- Se calcula 1/9 del diámetro: 1/9 x 9 = 1.
- Se le resta al propio diámetro: 9 - 1 = 8.
- Dicho resto se multiplica por sí mismo: 8 x 8 = 64 codos cuadrados.

El área de la base se ha de multiplicar entonces por la altura:

$$64 \times 10 = 640 \text{ codos cúbicos}$$

de manera que los siguientes pasos consisten en transformar esta medida en otra equivalente de capacidad:

- 640 codos cúbicos x 1 ½ = 960 khar
- 1/20 x 960 = 48 'cientos' de heqats-cuádruples
- 48 x 100 = 4.800 heqats-cuádruples.

Si bien este método de resolución puede aplicarse a todo problema similar con bastante facilidad, el escriba plantea poco después lo que Peet afirma que es "uno de los problemas más difíciles en el papiro"[5] que, tal como viene enunciado dice lo siguiente:

> **Rhind - Problema 43**: "Un granero redondo [cilíndrico] de 9 codos de altura [¿diámetro?] y 6 de anchura [¿altura?], ¿cuál es el contenido en grano que cabe en él?".

El procedimiento que muestra el escriba, dividido esquemáticamente en pasos sucesivos, es el siguiente:

- "Restar $\underline{9}$ de 9, el resto es 8.
- Añadir a 8 su $\underline{3}$, eso hace 10 ⅔ .
- Multiplicar 10 ⅔ por 10 ⅔ veces, eso hace 113 ⅔ $\underline{9}$.
- Multiplicar 113 ⅔ $\underline{9}$ por 4 veces, siendo 4 los ⅔ de 6 codos que es la anchura [¿altura?].
- 455 $\underline{9}$ es la cantidad [capacidad] en khar".

Es bastante obvio que existe una confusión entre el diámetro y la altura que no se sabe si proviene, como es probable, del propio enunciado mal copiado por el escriba o de un deseo de aplicar el método tradicional (hallar 1/9 del diámetro) a una cantidad tan cómoda como es la de 9 codos. Corregido el error del escriba y adoptando consiguientemente las dimensiones de 9 codos de diámetro d de la base y 6 codos de altura h, el análisis se vuelve más interesante al examinar el procedimiento seguido por el escriba que, en la siguiente tabla, se compara con el procedimiento ‘tradicional’ seguido en los problemas 41 y 42 del papiro Rhind:

Problema 43	Problemas 41, 42
$8/9\ d$	$8/9\ d$
$8/9\ d\ 4/3$	$(8/9)^2\ d^2$
$(8/9)^2\ d^2\ (4/3)^2$	$(8/9)^2\ d^2$
$⅔\ (8/9)^2\ d^2\ (4/3)^2\ h$	$3/2\ (8/9)^2\ d^2\ h$

Obsérvese que

de modo que el resultado tradicional en codos cúbicos debe multiplicarse habitualmente por 3/2 para transformarlo en khar de capacidad pero en el problema 43 esto se hace multiplicando desde el principio por 4/3 (1 1/3) y luego finalmente por 2/3. El error del escriba en el problema 43 consiste en ‘mezclar’ el nuevo procedimiento con el tradicional al incluir un primer paso innecesario ahora de calcular los 8/9 del diámetro. Si evitásemos ese paso los procedimientos comparados de ambos problemas serían los siguientes:

Problema 43	Problemas 41, 42
$d\ 4/3$	$8/9\ d$
$d^2\ (4/3)^2$	$(8/9)^2\ d^2$
$⅔\ d^2\ (4/3)^2\ h$	$3/2\ (8/9)^2\ d^2\ h$

de manera que, dada la equivalencia de fracciones que hemos expuesto anteriormente, los dos procedimientos coincidirán en su resultado final. En otras palabras, el problema 43 muestra una variación del procedimiento seguido en los problemas 41 y 42 consistente en la realización de operaciones con otras fracciones que evitan el uso de restas y muestran la flexibilidad numérica alcanzada por el escriba al realizar operaciones entre cantidades. El probable descuido en la realización del problema e incluso al copiar su propio enunciado vuelven probablemente de difícil interpretación lo que no es más que un método de resolución alternativo como hemos visto en otros problemas anteriormente.

Aplicaciones a problemas de construcción

Los mismos cálculos de volúmenes tanto de paralelepípedos de base cuadrada o rectangular como de cilindros debía estar presente en la construcción de las tumbas, los templos y, en general, todas las obras monumentales en piedra que salpican la historia artística y cultural del antiguo Egipto. El presente epígrafe ofrece algunos ejemplos de dichos cálculos que no han quedado documentados por escrito pero que es posible suponer por los restos que han sobrevivido y las anotaciones de los escribas que aparecen en distintos papiros sobre temas análogos.

El primer problema es sencillo y trata del cálculo del volumen de un cuerpo de base rectangular. Es evidente, a partir del estudio del papiro Reisner, que dicho cálculo se realizaba en la construcción de los templos y demás monumentos llegándose a registrar medidas muy detalladas. En las canteras de piedra a todo lo largo de Egipto se han encontrado huellas rectangulares separadas por estrechos canales, tal como se puede observar en el lado norte de la pirámide de Kefrén, en Gizah.

Estas huellas son los restos que quedan de haber separado bloques de piedra de dicha base mientras que los canales eran imprescindibles para introducir las cuñas de madera y demás instrumentos que se utilizaban para su extracción. En algunas canteras como la de Silsila las piedras han quedado talladas en todo su contorno salvo en la base que sigue unida a la piedra[6]. Pues bien, estas piedras son aproximadamente de

11 ½ codos de largo, 1 1/4 codos de ancho, 3 codos de alto

Para calcular su volumen, por tanto, se deberá hallar la superficie de la base:

1   11 $\underline{2}$ ✓
$\underline{2}$ 5 $\underline{2}$ $\underline{4}$
$\underline{4}$ 2 $\underline{2}$ $\underline{4}$ $\underline{8}$ ✓
----
1 $\underline{4}$ 14 $\underline{4}$ $\underline{8}$ codos cuadrados

para multiplicarla por la altura

1   14 $\underline{4}$ $\underline{8}$ ✓
2   28 $\underline{2}$ $\underline{4}$ ✓
----
3   43 $\underline{4}$ codos cúbicos

que resulta el volumen de la piedra a partir del cual se podía calcular, para una construcción determinada cuyo volumen ya se había hallado, cuántas de estas piedras eran necesarias.

Pero los volúmenes no sólo se debían aplicar a la piedra en las construcciones sino a determinar la cantidad de tierra que era necesario desalojar en la construcción de un canal o, como en el caso que vamos a tratar, en la excavación de un pozo funerario. El de la tumba de Zoser, bajo la famosa pirámide escalonada de Saqara, es vertical, tiene 28 metros de profundidad y lo cubría un tapón circular de granito de aproximadamente dos metros de altura y un metro de diámetro con un peso de unas tres toneladas y media[7]. Pues bien, supongamos que el diámetro sea de 1 ⅔ 1/6 codos (muy aproximadamente la medida real) y la profundidad corresponde a 53 ½ codos queriéndose calcular el volumen de tierra que debe desalojarse.

Para ello hallaremos en primer lugar la superficie del tapón circular de piedra mediante el método ya conocido de aproximación al área del círculo:

1 ⅔ $\underline{6}$ - $\underline{9}$ de 1 ⅔ $\underline{6}$ = 1 ⅔ aproximadamente
1 ⅔ se repite 1 ⅔ veces = 2 ⅔ $\underline{9}$ codos cuadrados de superficie

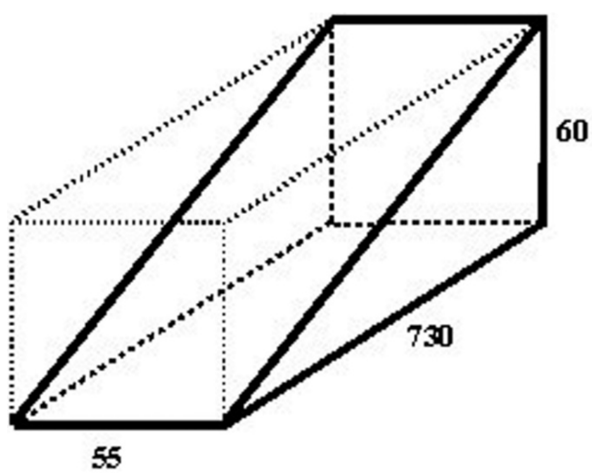
para a continuación multiplicarlo por la altura del pozo:

1   2 ⅔ $\underline{9}$ ✓
2   5 $\underline{3}$ $\underline{6}$ $\underline{18}$

4	11 $\underline{9}$	✓
8	22 $\underline{6}$ $\underline{18}$	
16	44 $\underline{3}$ $\underline{9}$	✓
32	88 ⅔ $\underline{6}$ $\underline{18}$	✓
$\underline{2}$	1 $\underline{3}$ $\underline{18}$	✓
53 $\underline{2}$	148 $\underline{2}$ $\underline{9}$ codos cúbicos de tierra	

Uno de los procedimientos más usuales para el traslado de las piedras desde el lugar de su almacenamiento junto a la construcción hasta su lugar definitivo consistía en colocarlas sobre una especie de trineos y empujarlos sobre una rampa previamente recubierta de barro y humedecida continuamente para disminuir el rozamiento. Tras la conclusión de la obra estas rampas se destruían quedando muchas veces sus restos junto a la construcción o, como en el caso del gran pilono inacabado en Karnak, apareciendo prácticamente intactas. Las rampas eran en muchas ocasiones de ladrillos lo que conducía a calcular el volumen de un sólido inhabitual en los cálculos anteriores. El llamado papiro Anastasi I presenta una colección de cartas que dirigía el escriba Hori a otro escriba llamado Amenemope dudando de su capacidad para resolver algunos problemas propios de su oficio. Aunque estas cartas fueran un modelo que al parecer se empleaba en las escuelas de escribas para su copia repetida ello no es óbice en lo que se refiere a la verosimilitud de los problemas planteados. En concreto, uno de ellos pide estimar el número de ladrillos que son necesarios para construir una rampa de 730 codos de largo, 60 codos de alto en la parte final y 55 codos de ancho[8].

La resolución de este problema conduce a calcular el volumen de una pirámide de base rectangular (la superficie de la rampa por la que circulan las piedras) y cuyo ángulo en el vértice es recto (figura en página siguiente).



Para hallarlo bastará considerar que esta pirámide es la mitad del paralelepípedo que tiene por base la de la rampa y por altura la máxima altura de la misma. Su volumen en codos cúbicos se obtendrá hallando en primer lugar la superficie de la base:

1	730	✓

2	1.460	✓
4	2.920	✓
8	5.840	
16	11.680	✓
32	23.360	✓

55	40.150	codos cuadrados

que hay que multiplicar por la altura máxima de la rampa:

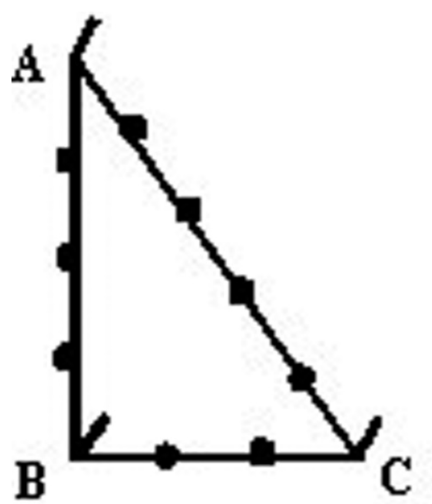
1	40.150	
2	80.300	
4	160.600	✓
8	321.200	✓
16	642.400	✓
32	1.284.800	✓

60	2.409.000	codos cúbicos

de forma que su mitad (1.204.500 codos cúbicos) será el volumen de la rampa, necesario para estimar la cantidad de ladrillos necesarios para su construcción.

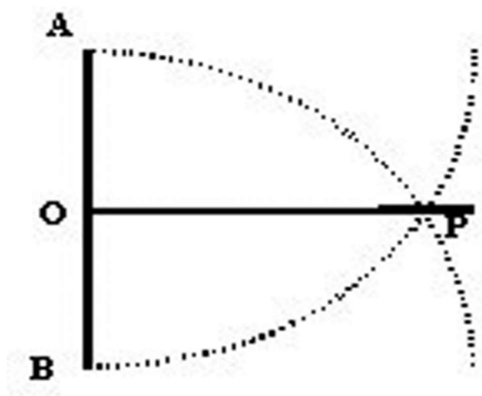
La pendiente de las pirámides

La construcción de las pirámides comenzaba, tras las ceremonias pertinentes, por el trazado de su base cuadrada. Se ha especulado abundantemente sobre la posibilidad de que los ángulos rectos de dicha base cuadrada se construyeran mediante la aplicación de la relación pitagórica (3, 4, 5) o similar a una cuerda de nudos entre estacas clavadas. De este modo, si se unían tres trozos de 3, 4 y 5 intervalos respectivamente de manera que coincidiese el extremo con el comienzo de la cuerda en el poste A, el punto C donde coincidía el trozo de tres intervalos con el de cinco era tal que el segmento BC y AB formaban un ángulo recto.



Parece más que probable que los egipcios conocieran una forma de trazar un ángulo recto. Todos sus templos y, en general, cualquier tipo de construcción incluidas sus casas y palacios aparecía con numerosos ángulos rectos. Además, en lo que respecta a la base cuadrada de la pirámide, es descartable una construcción aproximada del ángulo recto puesto que cualquier desviación mínima provocaría unas desviaciones en lados que a veces llegaban a superar los 200 metros que impedirían la formación final del cuadrado. De manera que era necesario construir ángulos rectos y con bastante precisión. La cuestión irresuelta es si se utilizaba o no para ello un triángulo pitagórico.

Los altares con base cuadrada de la antigua India, por ejemplo, presentan varias formas de construcción a cual más ingeniosa y que eluden la utilización de relaciones pitagóricas. Una de ellas[9] consistía en partir de un segmento de cuerda AB que actuaría a modo de lado.



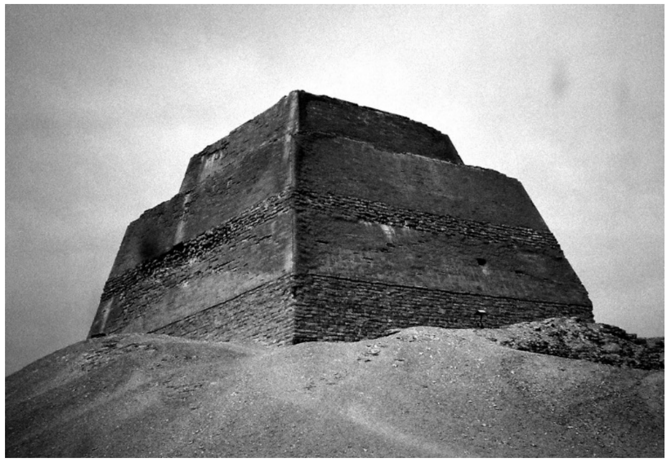
Centrando sucesivamente la cuerda en sus extremos A y B se trazarían arcos de circunferencia sobre la tierra de manera que el segmento dibujado desde el centro O de la cuerda AB hasta el punto P donde coincidiesen los dos arcos dibujados sería perpendicular al lado original.

Si la construcción se realizaba de manera que el punto O fuera uno de los vértices de la base de la pirámide el segmento OP constituiría el lado del cuadrado deseado.

Por tanto existen formas de construir perpendiculares y ángulos rectos que no presuponen la relación pitagórica y, además, su presencia está atestiguada en construcciones védicas antiguas por lo que no cabe aducir que constituya un método demasiado complejo.

Dejando a un lado el problema de construcción de la base de la pirámide, lo cierto es que el escriba se enfrenta entonces a otro problema de especial importancia: Determinar la pendiente que deben tener las paredes laterales y mantener dicha pendiente a lo largo de toda la construcción.

Hasta llegar a la monumental pirámide de Keops los arquitectos egipcios hubieron de construir otras pirámides que denotan cambios de planes y diferentes criterios empleados. Las tres pirámides del antecesor de Keops, el rey Snofru (2625 - 2585), son el mejor ejemplo de la diversidad de intentos producidos. La primera, levantada en Meidum y que probablemente comenzara su padre Huni, tiene una elevada pendiente de 51º 50' que provocó posteriormente su hundimiento parcial.



Pirámide hundida de Huni

Pirámide acodada de Snofru

El propio Snofru comenzó a levantar otra en Dashur de 54º 27' de pendiente, aún más vertical que la de su padre, lo que condujo además, dadas sus mayores dimensiones en la base, a que el volumen de piedra combara la estructura interna de la pirámide. Es por ello que, en un intento de acabarla a toda costa, la pendiente disminuye abruptamente a una cierta altura transformándose en otra más suave de 43º 22' que permite su conclusión a una altura menor que la originalmente prevista.

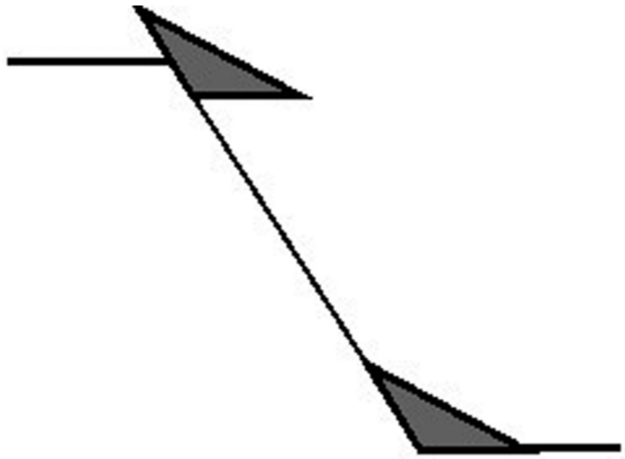
Finalmente, la tercera pirámide de Snofru se levanta en la propia llanura de Dashur y, siendo la definitiva, resulta con una pendiente igual a aquélla con la que se acabó la pirámide anterior (43º 22') lo que hace que no presente ningún problema de sobrepeso (de hecho se sigue conservando en buen estado) y la estructura interna (en particular, los techos en saledizo que siempre comportan una cierta inestabilidad) no se resienta.

Pirámide aplanada de Snofru

Sin embargo, resulta algo aplanada respecto al prototipo de pirámide, la de su hijo Keops, que vuelve a una pendiente de 51º 50' que aún será superada por la de sucesor Kefrén (53º 7'). El volumen de piedra que ello comporta obligará a realizar unas estructuras de sostenimiento de las cámaras funerarias de gran envergadura. En líneas generales las pendientes en las pirámides del Imperio Antiguo oscilarán entre estos valores extremos con la excepción de los 56º 18' alcanzados por la pirámide de Unas (2371 - 2350).

Pirámides de Keops, Kefrén y Micerinos

Sin embargo, son las pendientes sobre las que centraremos nuestra atención. Cuando el arquitecto había trazado la base cuadrada era necesario fijar una pendiente dada, como vemos, por experiencias anteriores y modificaciones propias que debían tener en cuenta el volumen de la piedra que comportaba. Ahora bien, el problema básico consistía en mantener esa pendiente en las cuatro caras simultáneamente dado que una variación en las pendientes provocada por piedras mal talladas comportaría que las cuatro caras no llegaran a converger en el vértice. Por tanto, la pendiente debía mantenerse no sólo en la base de las cuatro caras sino en todos los puntos de dichas caras laterales. El procedimiento podría basarse en conservar constante el ángulo suplementario hasta los 180º marcados por la horizontal[10].



Para ello, un aparato de estructura triangular y con un ángulo que, si la pendiente deseada fuera de 51º, resultaría de 129º, se colocaría tanto en la base de la pirámide (y la horizontal quedaría garantizada por el suelo) como en cualquier otro punto de la pared lateral (y entonces la horizontal habría de garantizarse con un nivel de agua, por ejemplo).

La pendiente de la pirámide no estaba en aquel tiempo medida en grados ni minutos, herencia de la astronomía mesopotámica que nos han transmitido los griegos. Los antiguos egipcios utilizaban el ‘seked’ que puede definirse como el número de palmos horizontales que corresponden en la diagonal de la base de la pirámide a 1 codo vertical en su altura. A partir de esta definición pueden plantearse al menos dos problemas:

· Conociendo la base y la altura, calcular el seked de la pirámide.
· Conociendo la base y el seked, averiguar la altura que alcanzará la pirámide.

Rhind - Problema 56: “Ejemplo de calcular una pirámide cuyo lado de la base es 360 [codos] y cuya altura es 250 [codos]. Quiero conocer su seked”.

El procedimiento es sencillo y se va a repetir en varios problemas más del papiro:

· Dividir el lado de la base por la mitad, ½ de 360 son 180 codos al objeto de formar un triángulo rectángulo.
· Dividir 180 entre la altura 250, dando en este caso ½ 1/5 1/50, que resulta la longitud horizontal que corresponde a la unidad vertical en la unidad que fuere y todo ello dentro de un triángulo rectángulo semejante al anterior.
· La cantidad ½ 1/5 1/50 son también los palmos horizontales que corresponden a un palmo vertical. Como un codo vertical son los 7 palmos que caracterizan el componente vertical del seked, habrá que multiplicar por 7 la cantidad anterior para obtener dicho seked:

$$7 \times ½\ 1/5\ 1/50 = 5\ \ 1/25$$

Rhind - Problema 59b: “Si construyes una pirámide cuyo lado de la base es 12 [codos] y con un seked de 5 palmos 1 dedo, ¿cuál es la altura?”

El carácter de ejercicio escolar en este problema se observa en la irreal dimensión de la base (12 codos). No obstante, se puede asegurar que éste debía ser uno de los problemas más frecuentemente planteados en el comienzo de la construcción, ya que las dimensiones de la base eran una de las primeras acciones del arquitecto así como la determinación de la pendiente, por lo que la altura final relacionada con los datos anteriores era, en ese momento inicial, algo impreciso pero calculable como se puede apreciar por el procedimiento del escriba:

· Multiplica por dos el seked con el objeto de considerar la base entera en ves de su mitad como incluye la definición del seked: 2 x 5 1/4 = 10 ½ dado que un palmo equivale a cuatro dedos.
· Dividir 7 entre 10 ½ para reducir el resultado a la relación entre las mismas unidades, es decir, 7 : 10 ½ = ⅔
· Esta es la cantidad que se multiplica por el lado entero de la base: ⅔ x 12 = 8 codos

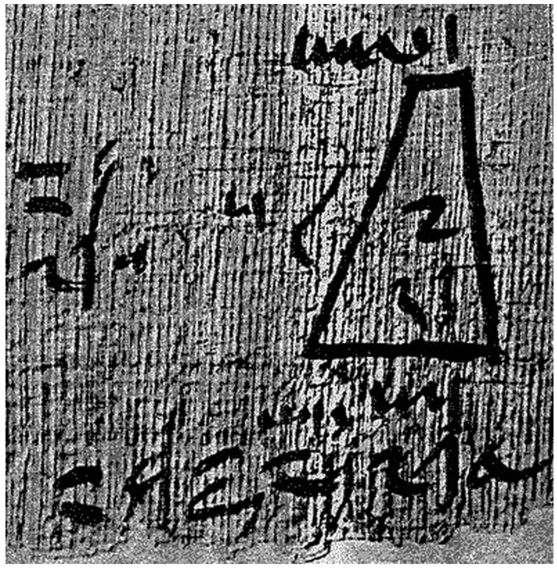
Peet[11] observa que éste es un nuevo caso en que el escriba no sigue el método "lógico" de lo cual este egiptólogo se admira. En efecto, lo 'lógico' sería partir de la propia definición del seked para plantear un caso de proporcionalidad numérica:

Aunque las operaciones aritméticas son las mismas que las realizadas por el escriba la suposición de que existe un método más 'lógico' no hace sino enmascarar una posición predeterminada a favor de métodos y planteamientos más actuales que es necesario apartar en el examen de los métodos egipcios que, por otra parte, ya han mostrado en ejemplos anteriores su facilidad numérica para alterar el orden de las operaciones si ello supone una mayor facilidad operativa.

En todo caso, es posible que el conocimiento de la base y la determinación del seked hallan llevado a la altura de la pirámide y el cálculo posterior del volumen de piedra que es necesario colocar hasta una determinada altura y la que pesará sobre cualquier cámara funeraria colocada a dicha altura, por ejemplo a 2/3 de la altura contada desde la base como está la propia cámara de Keops. Así pues, es previsible que los arquitectos egipcios se enfrentaran a problemas sobre el volumen de una pirámide e incluso de una pirámide truncada. Ningún problema del papiro Rhind afronta estos casos y hubieran podido quedar en entredicho dada la complejidad de su cálculo si el papiro de Moscú no mostrara, en su problema 14, la forma en que los egipcios hallaban el volumen de un tronco de pirámide.

El tronco de pirámide

El problema geométrico más complejo abordado por los egipcios y del que haya quedado constancia es el cálculo del volumen del tronco de pirámide o 'pirámide truncada'. Su necesidad está evidentemente relacionada con las construcciones funerarias características del Imperio Antiguo y el conocimiento del volumen de piedra necesario hasta determinada altura de la pirámide. El papiro Moscú incluye dicho cálculo exponiendo una serie de reglas sucesivas que coinciden básicamente con las realizadas actualmente, nada elementales para aquella época. Dentro de ellas una cuestión previa que llamó la atención desde el principio fue la aparición del término 1/3 en la relación de los volúmenes y que, dada la corrección con que se aplica durante el procedimiento, sólo puede estar motivada por el conocimiento previo de que el volumen de una pirámide es la tercera parte del volumen del paralelepípedo de la misma base e igual altura que la pirámide.



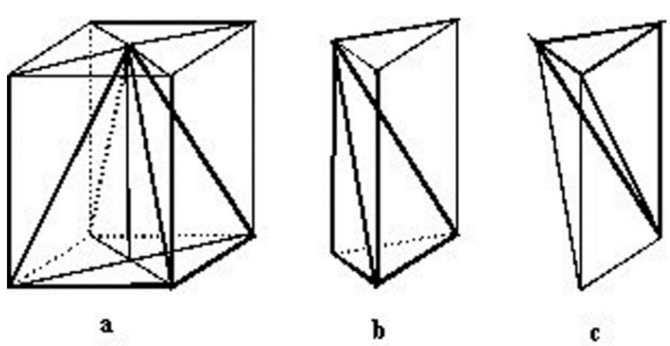
Problema 14 del papiro Moscú

De manera que tenemos que analizar inicialmente la forma en que los egipcios llegan a esta relación entre el paralelepípedo y la pirámide teniendo en cuenta que ni siquiera tenemos constancia explícita de dicha relación sino que es de carácter indirecto, por su presencia en otro procedimiento de cálculo.

A ese propósito se han sugerido[12] procedimientos extremadamente empíricos como es construir modelos en madera cuyo peso se compare o recipientes de tal forma llenos de arena cuyo contenido se pesa con el mismo objetivo.

Observando la complejidad que podían alcanzar distintos cálculos entre los escribas egipcios podemos afirmar que estas posibilidades son altamente improbables. Aquí expondremos un método para hallar la relación de 1/3 entre ambos volúmenes basado en la descomposición del paralelepípedo en diversos prismas (poliedros limitados por dos polígonos iguales y por varios paralelogramos).

La descomposición que proponemos se acerca más a las manipulaciones que podrían haber hecho los egipcios a partir de ejemplos como el que antes observamos en el problema de la rampa. Consiste en trazar la pirámide interior al paralelepípedo distinguiendo entre dicha pirámide y el resto del paralelepípedo (figura en la página siguiente, a).

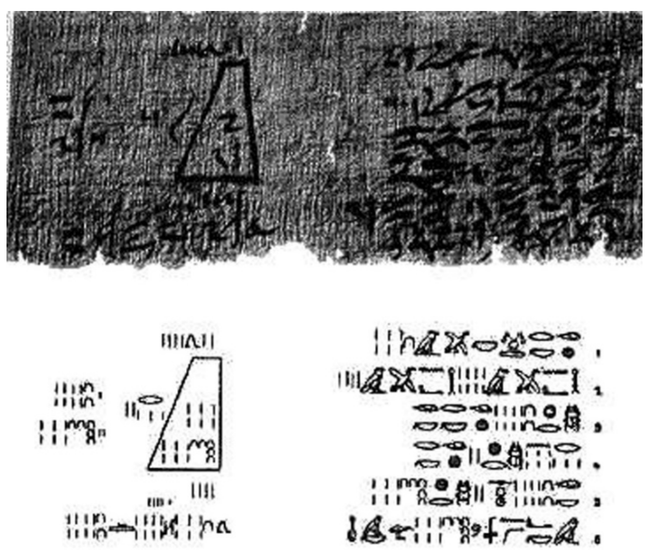


Si el paralelepípedo se divide en cuatro prismas triangulares iguales[13] trazando las diagonales de sus caras superior e inferior se podrá diferenciar cada uno de estos prismas que, a su vez, comprende una cuarta parte de la pirámide original en forma de un tetraedro recto (b). Si el resto del prisma triangular se divide en dos tetraedros iguales mediante la subdivisión por la diagonal de su cara rectangular (c) uno de ellos es claramente igual (por tener la misma base e igual altura) que el tetraedro parte de la pirámide original.

En consecuencia, la parte de la pirámide resulta ser de un volumen mitad que el resto del prisma triangular o, en otras palabras, la tercera parte del volumen total correspondiente al prisma recto. Como esta relación se repite en cada uno de los cuatro prismas triangulares en que se ha descompuesto el paralelepípedo la relación global se mantendrá: El volumen de la pirámide es la tercera parte del paralelepípedo de igual base e idéntica altura.

A partir de estas hipótesis ya es posible abordar el problema de calcular el volumen del tronco de pirámide tal como enuncian los propios egipcios:

> **Moscú - Problema 14**: "Ejemplo de calcular una pirámide truncada. Si te dicen: 'Una pirámide de 6 de altura por 4 de base [el cuadrado inferior] por 2 de arriba [el cuadrado superior]".



que es resuelto mediante una serie de pasos que transcribimos:

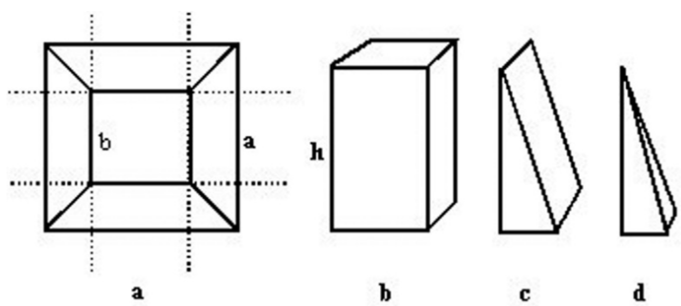
- "Haces el cuadrado de este 4; el resultado es 16.
- Es el doble de 4 [multiplicar 4 por 2]; el resultado es 8.
- Haces el cuadrado de este 2; el resultado es 4.
- Añades el 16 y el 8 y el 4; el resultado es 28.
- Tomas $\underline{3}$ de 6; el resultado es 2.
- Tomas 28 dos veces; el resultado es 56.
- Fíjate, [el volumen] es 56. Encuentras [que esto es] correcto".

Considerando que el tronco de pirámide tiene una base inferior cuadrada de lado a y una superior de lado b y siendo la altura h, los pasos del escriba suponen hacer lo siguiente:

- a^2
- $a \cdot b$
- b^2
- $a^2 + a \cdot b + b^2$
- $1/3 \cdot h$
- $V = 1/3 \cdot h \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2)$

que es exactamente la expresión actual para alcanzar este volumen. Aunque la presencia de 1/3 ya ha sido comentada, la construcción de este conjunto de reglas y las relaciones que establece son de origen impreciso. Expondremos dos posibilidades de naturaleza distinta: Mientras la primera se apoya de nuevo en la descomposición del tronco de pirámide en distintos sólidos relativamente sencillos de manipular, la segunda posibilidad parte de una idea más inmediata (la diferencia entre la pirámide a construir y la pirámide que queda por levantar) pero justifica de forma más imprecisa el alcanzar finalmente el conjunto de reglas del escriba.

Consideremos una visión desde arriba de la pirámide truncada de manera que supongamos[14] los cortes que aparecen en la figura (a). Estos cortes provocarán la aparición de un paralelepípedo central (b), cuatro prismas triangulares (c) y cuatro pirámides rectas en las esquinas (d).

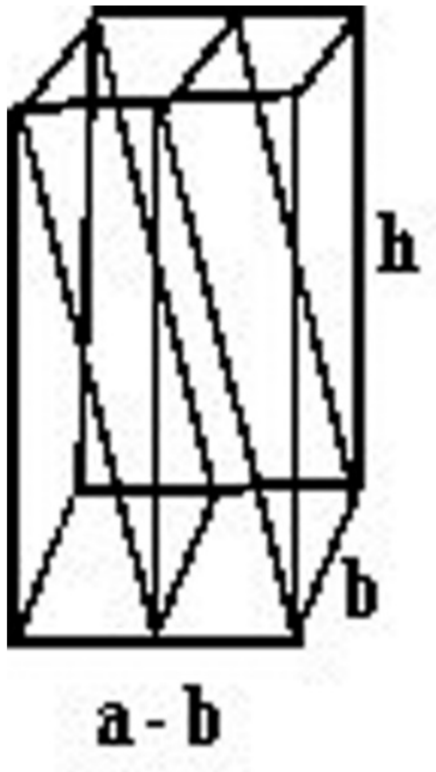


El paralelepípedo central tendrá de volumen

$$V_1 = b^2 \cdot h$$

mientras que los prismas triangulares tienen por cara inferior un rectángulo de dimensiones b por ½ (a - b) siendo su volumen fácil de calcular tal como hemos visto en el ejemplo de la rampa. De todas maneras, como son cuatro de estos prismas se pueden añadir unos a otros hasta formar un paralelepípedo que tiene una base rectangular de dimensiones b y (a - b), resultando en total de volume

$$V_2 = b \cdot (a - b) \cdot h = (a\,b - b^2) \cdot h$$



pudiéndose unir al paralelepípedo de volumen V_1 encontrándose que el resultante tendría por volumen:

$$V_1 + V_2 = b \cdot (a - b + b) \cdot h = a \cdot b \cdot h$$

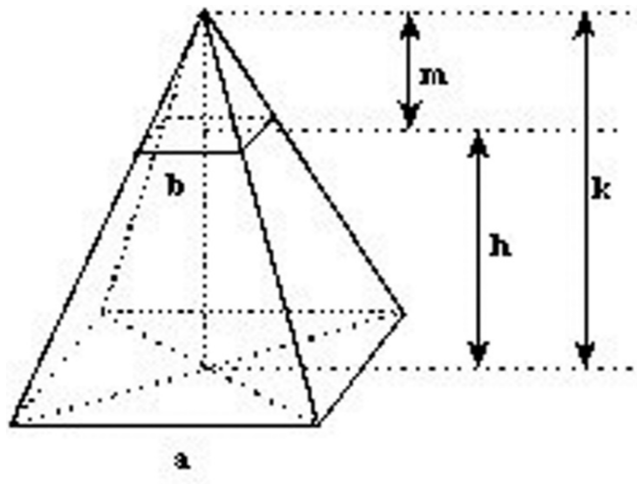
Conociendo el volumen de una pirámide se podrá deducir el correspondiente a las pirámides de las esquinas, cada una de las cuales tiene por base un cuadrado de lado ½ (a - b) y altura h. Habida cuenta que hay un total de cuatro el volumen total de estas pirámides supondrá:

$$V_3 = 4 \cdot 1/3 \cdot [½ (a - b)]^2 \cdot h =$$
$$= 1/3 \cdot (a^2 + b^2 - 2 a b) \cdot h$$

alcanzándose finalmente un volumen final del tronco de pirámide de

$$V_f = h/3 \cdot (3 a b + a^2 + b^2 - 2 a b) =$$
$$= h/3 \cdot (a^2 + b^2 + a b)$$

De todas formas, la manera que parece más inmediata para calcular este volumen consiste en partir del correspondiente a la pirámide total y restarle el volumen de la pirámide que se levanta sobre el corte superior del tronco (figura en página siguiente). Sin embargo, dicho cálculo no es elemental[15].

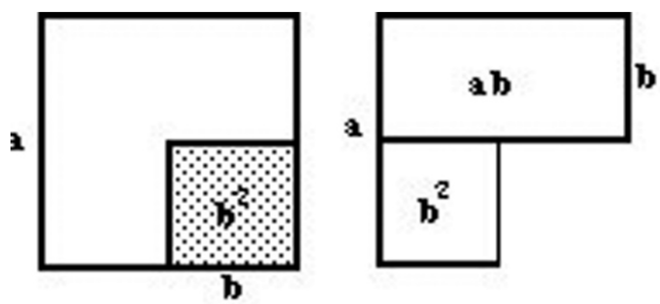


Esta diferencia sería:

La aproximación a la fórmula general puede haber sido un proceso basado en la consideración de casos sencillos. Si se considerase que la pirámide se trunca en la mitad de la altura total, h = m y la expresión general anterior daría lugar a:

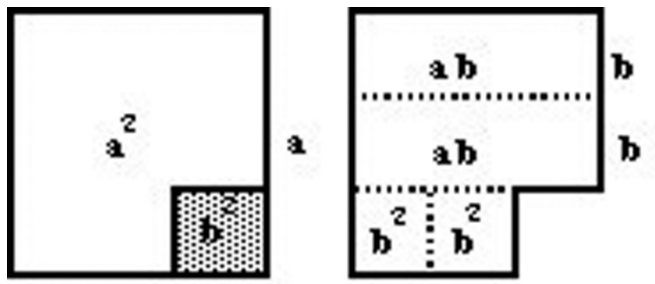
Consideremos los dos últimos términos de los tres encerrados entre paréntesis, es decir, $a^2 - b^2$, que resulta ser la diferencia entre las dos áreas de las bases cuadradas. Si se corta de la grande la pequeña, el resultado será de $a^2 - b^2 = a b + b^2$ de manera que sustituyendo en la última expresión queda la fórmula del volumen del tronco de pirámide

$$V = h/3 (a^2 + a b + b^2)$$



Si la pirámide se trunca a una altura de 2/3 de su altura total, la altura de la pirámide pequeña es la mitad del tronco de pirámide, es decir,

$$m = ½\ h.$$



Por la resta de las dos pirámides se tendrá entonces que:

Se puede examinar el segundo sumando encerrado entre paréntesis de una forma similar a la anterior, de manera que se encontraría que

$$a^2 - b^2 = 2\,a\,b + 2\,b^2$$

de forma que

$$½\,(a^2 - b^2) = a\,b + b^2$$

llegando a la misma expresión del tronco de pirámide.

Notas

1 Serrano, J.M. (1993): “Textos para la historia Antigua de Egipto”, p. 81.
2 Kemp, B.J. (1996): “El Antiguo Egipto. Anatomía de una civilización”.
3 Badawy, A. (1948): “Le dessin architectural chez les anciennes egyptiens”.
4 Kemp, B.J. Op. cit.
5 Peet, T.E. (1923): “The Rhind mathematical papyrus”.
6 Clarke, S. y Engelbach, R. (1990): “Ancient Egyptian construction and architecture”.
7 Albertelli, L. (1994): “El secreto de la construcción de la pirámide de Kheops”.
8 Clarke, S. y Engelbach, R. Op. cit.
9 Maza, C. (2000): “Las Matemáticas de la Antigüedad y su context histórico”.
10 Albertelli, L. Op. cit.
11 Peet, T.E. Op. cit.
12 Gillings, R.J. (1972): “Mathematics in the time of faraons”.
13 Rey Pastor, J. y Puig, P. (1959): “Elementos de Geometría”.
14 Gunn, B. y Peet, T.E. (1929): “Four geometrical problems from the Moscow Mathematical Papyrus”.
15 Gillings, R.J. Op. cit.

Capítulo 12
Proporcionalidad geométrica en el arte

Escalas en la construcción

Es indudable que los egipcios conocieron las aplicaciones de la proporcionalidad geométrica en sus construcciones de templos, pirámides y otros edificios. Las hemos podido comprobar en sus cálculos sobre el seked de las pirámides con las que calculaban la adecuada inclinación de las caras laterales de estos monumentos. Otro momento adecuado para registrar estas aplicaciones corresponde a la fase preparatoria de la construcción. Se han conservado algunos planos de edificios o tumbas que muestran la utilización de estos esquemas o planos tanto para obtener el favor real, es decir, la admisión por el faraón de la idoneidad del proyecto, como para orientar la acción futura de los capataces y trabajadores en la obra. En el Valle de los Reyes, por ejemplo, se excavaron hasta 62 tumbas en un período de 420 años, algunas de ellas de una longitud importante.

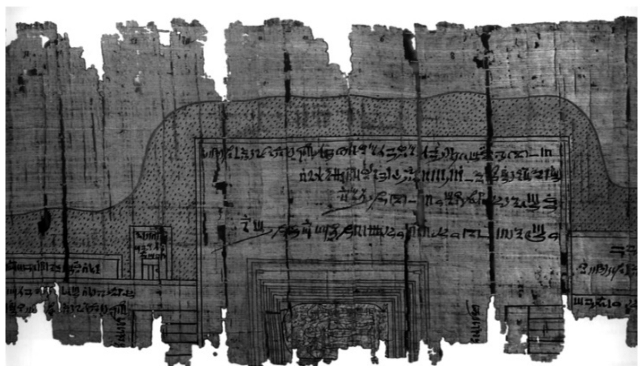
Se sabe al menos de un caso en que la construcción de uno de estos hipogeos tuvo que cambiar su recorrido al tropezarse con otra tumba previa[1]. Es inevitable que en un período de tiempo tan prolongado las situaciones de estas tumbas pudieran ser olvidadas. Sucesos como el anterior debieron aconsejar la conservación y archivo de los planos realizados con especificación de la situación que ocupaban. De uno de ellos hablaremos inmediatamente. Sin embargo, pese a la necesidad de dibujar los planos resulta más dudoso que se utilizase la proporcionalidad geométrica para confeccionar rigurosamente planos a escala. El examen en este epígrafe de algunos ejemplos mostrados por Clarke y Engelbach[2] ilustrarán adecuadamente los interrogantes abiertos a este respecto por los pocos restos arqueológicos que han resistido el paso del tiempo.

Es conocido que los egipcios dibujaban sus casas, jardines y templos sin perspectiva alguna. No hay referencia alguna a cómo supuestamente ve el ojo humano los objetos representados ya que se muestran sin profundidad, desarrollándose en una forma plana. Sin embargo, ello no obsta para que los egipcios consiguiesen mostrar todos aquellos elementos que son relevantes en el objeto representado, aunque se hallen ocultos a la vista. Así, en la representación de una hacienda que aparece en la tumba de Meriré en el-Amarna[3] se aprecia un estanque con una visión cenital que permite desplegar sus cuatro lados junto a la escalerilla de acceso. Sin embargo, no se dibujan las copas de los árboles que lo rodean porque el tronco es tan importante como la copa para describir un árbol (de hecho sólo con esta última no se apreciaría si es un árbol o un agujero). Por ello se dibujan los árboles con una visión lateral de manera que el efecto no se ajusta a la visión humana ya que no es posible adoptar los dos puntos de vista a la vez pero sí muestra simultáneamente todos los aspectos que se desea dar a conocer como elementos de esa hacienda.

Esta diversificación de puntos de vista presenta a un dibujante egipcio que es capaz de adoptar diferentes puntos de vista e incluso incluir todos ellos en el mismo dibujo para manifestar lo que necesita que sea manifestado. Sin embargo, también podía separar estos distintos puntos de vista como se aprecia en el dibujo encontrado en las ruinas de Gurob de lo que parece ser una urna portátil correspondiente a la dinastía XVIII[4]. En ella se aprecia dos dibujos de la citada urna desde una visión frontal y otra lateral. A la diversificación de puntos de vista se une un cuadriculado que llama poderosamente la atención dado que hay una clara coincidencia en la altura de las dos imágenes (19 cuadrados desde la base hasta el techo de la urna) así como el hecho de que numerosos puntos importantes del dibujo se ajustan a las líneas marcadas por el cuadriculado. La cuestión fundamental en lo que a la proporcionalidad geométrica se refiere reside en saber si este cuadriculado es una mera ayuda para realizar el dibujo con corrección (teniendo en cuenta que se trazaba a mano alzada) o bien un auxilio en la representación a escala de la urna, habida cuenta de la coincidencia de alturas entre ambas imágenes.

A esta pregunta no se puede responder a partir de estos dibujos puesto que, al no disponerse del objeto material correspondiente, no se puede comparar la representación con lo representado para determinar en qué medida la primera es proporcional al segundo. Sin embargo, hay dos casos en que se conservan ambas partes y se pueden comparar: El plano de la tumba de Ramsés IV y el contenido de un ostraca que probablemente se remonta a la III dinastía.

En un papiro conservado en Turín se dibuja el plano de una tumba que se ha identificado como del cuarto faraón en ostentar el nombre de Ramsés.

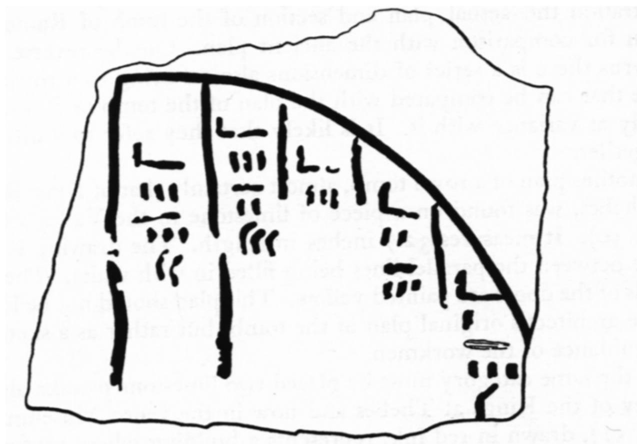


Papiro de Turín

En hierático aparecen descripciones a lo largo de las diversas salas que incluyen a menudo medidas:

> "Cámara Y [donde reside el sarcófago]:
> a. Su puerta está cerrada.
> b. La casa del Dios donde queda Uno [el faraón], de 16 codos; anchura de 16 codos, altura de 10 codos, siendo dibujada en perfil, grabado con el cincel, rellenado con colores y completado, siendo provisto con el equipamiento de Su Majestad en cada lado de ella, junto con la Divina Eneada que está en el De y [Más Allá].
> c. Total, empezando desde el primer corredor a la Casa del Dios, 136 codos 2 palmos.
> d. Empezando desde la Casa del Dios hasta el Tesoro del Interior, 24 codos 3 palmos. Total, 160 codos 5 palmos"[5].

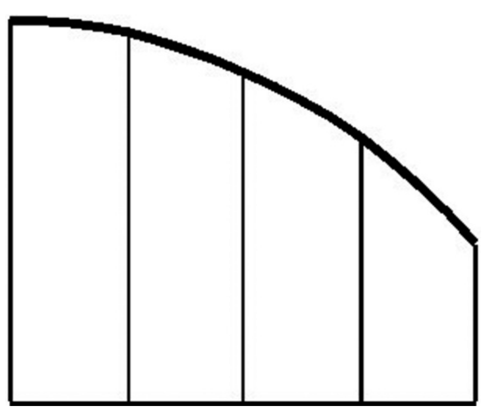
La comparación de los datos numéricos encontrados en el papiro con los restos de la tumba de Ramsés IV muestran que son en gran medida correctos lo que viene a corroborar el hecho de que este papiro corresponda efectivamente a dicha tumba. Sin embargo, una comparación de algunos de estos datos reales con el dibujo hacen indudable que éste no se ha dibujado a escala por lo que, al no respetarse la proporcionalidad geométrica, los elementos (cámaras, pasillos, sarcófagos) son correctos pero sus formas no. De hecho, una representación actual a escala de dicha tumba cuadruplica aproximadamente la longitud de las salas de la derecha respecto de las que se encuentran a la izquierda de la sala central. En el dibujo, sin embargo, aparecen casi iguales. Así pues, el plano realizado por el arquitecto o siguiendo las instrucciones del mismo no pretende una representación proporcional sino plantear los elementos fundamentales de la tumba colocando las medidas exactas para que los trabajadores tuvieran claros los objetivos a cumplir. No tiene por objetivo representar sino dar las instrucciones de construcción y aunque ambas cosas no son incompatibles es evidente que la primera representa un esfuerzo que aquí se antoja innecesario para cumplir con la principal que es la segunda.



Ostraca de Saqara

Otro testimonio sobre la posible aplicación de la proporcionalidad a algunos detalles arquitectónicos se encuentra al examinar un ostraca encontrado en Saqara y que se ha datado en la III dinastía. Dibuja una curva acompañada por divisiones verticales aproximadamente equidistantes y una serie de números entre dichas divisiones que, de derecha a izquierda, son los siguientes:

> “1 codo, 3 palmos, 1 dedo.
> 2 codos, 3 palmos.
> 3 codos.
> 3 codos, 2 palmos, 3 dedos.
> 3 codos, 3 palmos, 2 dedos”[6].



Se puede hacer la sugestiva hipótesis de que las separaciones verticales, que no se especifican, corresponden a la unidad más habitual (un codo) pudiéndose así dibujar la curva resultante para encontrar una disposición muy semejante a la del ostraca. De este modo, estos números actuarían a modo de 'coordenadas cartesianas' de la curva. A este hecho hay que añadir que el ostraca se encontró cerca de una construcción en forma de silla con respaldo la parte superior del cual, aunque semidestruida, presenta una forma curva similar a la encontrada en el ostraca.

Encontramos así dos ejemplos de lo que parecen ser dibujos esquemáticos utilizados antes y durante la construcción para orientar la acción de los trabajadores encargados de la construcción. Mientras que el primero no sigue la proporcionalidad geométrica que conduciría a un plano a escala, el segundo sugiere la posibilidad de que existiesen especificaciones sobre detalles arquitectónicos que no sólo mostrasen las medidas a realizar sino también la forma definitiva del objeto a construir.

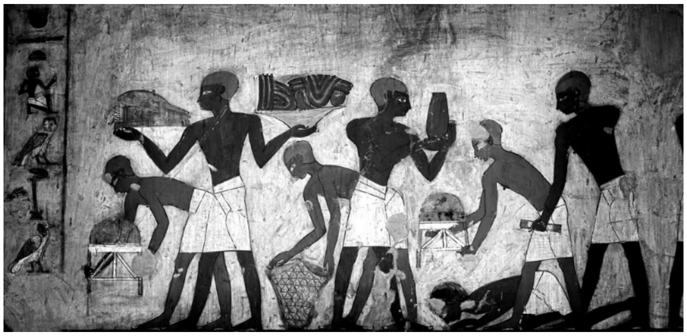
La pintura egipcia

Se suele tratar de invariables las formas artísticas del antiguo Egipto y, aunque esto no sea enteramente cierto, es muy probable que desde las primeras dinastías se fuese constituyendo lo que se ha denominado un canon artístico, unos criterios artísticos e incluso metrológicos que guiaron la actuación de los escultores y pintores egipcios. Ello no es ajeno al fenómeno religioso sino que precisamente podría apoyarse en las creencias de los egipcios acerca de la inmortalidad.
En efecto, para ellos el ser humano

> "Es el resultado de la unión estrecha de una realidad material, el cuerpo (ht), y una serie de entidades espirituales de difícil traducción e interpretación. Entre ellas destaca el Ba, que equivaldría al alma de la persona... Más difícil de definir es el Ka... su Ka nace con él, es moldeado por Khnum, el dios morueco, en el mismo torno de alfarero que el rey niño y tiene su misma fisonomía; es por ello que se le ha asimilado a un 'doble' (G. Maspero) especie de espíritu protector o genio personal que guarda o vigoriza al individuo, pero que es diferente a él"[7].

En la muerte estas diferentes entidades quedan desunidas entre sí, carentes de la armonía que da la vida. Por ello el propósito que guía a los que cuidan del faraón muerto es el de devolver la unión y armonía allí donde se han perdido. De ahí la momificación del cadáver con la consiguiente conservación del cuerpo, la presencia de estatuas en bulto redondo que acojan el Ka del faraón y que, para ello, deben ostentar los símbolos de su reinado, fácilmente reconocibles por el Ka.

También se deben dejar estatuillas de criados que puedan seguir sirviendo a su señor en el Más Allá, dibujar en las paredes escenas de su vida y de sus triunfos, para que pueda esgrimirlos en el juicio al que será sometido antes de incorporarse al panteón de los dioses. Todas estas circunstancias conducen o al menos se relacionan con diversas características de la pintura y escultura egipcias:



· Estas formas artísticas no se realizan fundamentalmente para ser contempladas por los egipcios, sino que en muchas ocasiones se introducen en la cámara funeraria quedando fuera de la visión de cualquier ser humano.

· Ello puede tener relación con la necesidad de mostrar todos los elementos de la figura humana pero sin dotar de la profundidad y la perspectiva asimilables a la visión del ojo humano, puesto que no eran ojos humanos quienes tenían que contemplarla.

· La representación del faraón al principio y luego de los nobles que son enterrados en sus tumbas no puede estar sujeta a ‘modas’ o cambios artísticos profundos puesto que su objetivo no es responder a valoraciones humanas. Cuando la pintura y escultura se utilicen para ser vistas por los egipcios el faraón tomará una figura estereotipada (vencedor de las batallas, receptor de ofrendas, etc.) con el paréntesis del período correspondiente a Akhenatón en Tell el-Amarna.

Akhenatón, Nefertiti y sus hijos

Todo ello favorece la creación de un canon artístico que guíe la actuación de los pintores y escultores en la representación de la figura real y, más adelante, de sus nobles y sirvientes. Siguiendo los criterios antes comentados la pintura de la figura humana adoptará una forma muy conocida: La cabeza de perfil, los hombros así como el único ojo representado, de frente, los codos, las nalgas, las piernas y pies vuelven a presentarse de perfil mientras que la faldilla triangular abrochada a la cintura se observa de frente. En general, toda parte saliente del cuerpo (nariz, el pezón, los pies, los codos) se dibuja de perfil como única manera de mostrarlo explícitamente (a lo que se añade la presentación conjunta del pecho y la espalda) mientras que las partes interiores (como el ojo o el ombligo) se sitúan de frente. En todo caso, el artista egipcio consigue con estos criterios mostrar todos los elementos del cuerpo humano de una forma que ha podido calificarse del siguiente modo

> "El arte egipcio no estaba evolucionando hacia algo mejor; era un sistema representativo totalmente terminado, sutil, maduro, y mostrando la información que precisamente los egipcios quisieron mostrar. Al mismo tiempo, los artistas habían desarrollado un sistema armonioso de composición para que las mejores obras de arte no fueran meramente funcionales sino estéticamente agradables"[8].

Estas pinturas eran realizadas en las tumbas tras la actuación de los yeseros, que cubrían e igualaban las oquedades de la roca excavada. Pues bien, se han encontrado en algunas tumbas pinturas abandonadas, posiblemente por un cambio de planes o por la muerte repentina del propietario, que muestran las figuras dentro de un cuadriculado en tinta roja. Estas rejillas se han encontrado también en los templos y aunque predominan en los casos de pinturas inacabadas, también se presentan en algunos casos aplicadas a pinturas conclusas. Aunque su presencia se detecta en obras a partir del Imperio Medio, se tiene una adecuada certeza de que ya se utilizaban en el Imperio Antiguo, como veremos más adelante.

Estas cuadrículas parecen constituir un instrumento utilizado por el pintor para guardar las proporciones de las figuras de modo que éstas adquiriesen una forma proporcionada y sin que ninguna de sus partes distorsionase el resultado. Su naturaleza y los criterios de su construcción han conducido a importantes discusiones sobre el hecho de que se aplicase o no con rigor la proporcionalidad geométrica a la pintura e incluso la escultura egipcias, sea en bajos o alto-relieves así como en esculturas de bulto redondo. A pesar de su aplicabilidad a todas estas formas artísticas excluiremos de nuestra exposición posterior cualquier consideración a las esculturas así como a las figuras femeninas, sentadas, arrodilladas o en diversos escorzos, que tienen un tratamiento semejante pero distinto al que aquí se tratará. La naturaleza del canon artístico y su relación con las cuadrículas trazadas se discutirá a partir del examen exclusivo de las figuras masculinas erguidas.

El canon y las proporciones

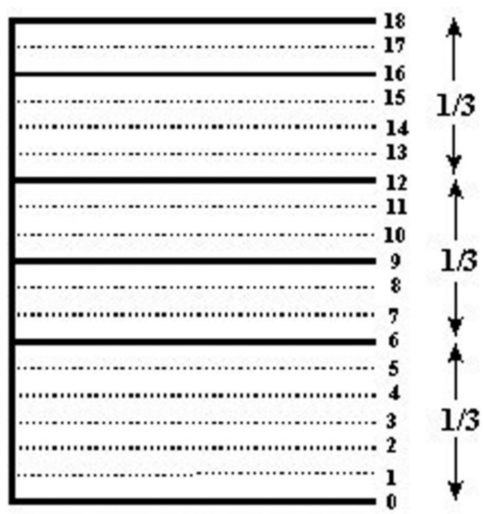
Las cuadrículas conservadas en restos de pinturas y relieves son escasas al corresponder frecuentemente a obras inacabadas. Este hecho hace discutible que su origen se remonte al Imperio Medio, período en el que se han datado las cuadrículas más antiguas. Es muy posible que en el Imperio Antiguo las proporciones de las figuras, es decir, las relaciones entre las diversas partes del cuerpo pintado o esculpido, fueran consideradas mediante recursos técnicos similares. Ello se puede defender a partir de dos hechos: Los restos de líneas guía horizontales encontrados en algunas pinturas y la adecuación de las figuras del Imperio Antiguo a los criterios establecidos en las cuadrículas del Imperio Medio. Abordaremos ahora el primer punto.

En algunas figuras de la tumba de Inyotef en Tebas así como en una pintura descubierta dentro de la capilla funeraria de Akhithotep en Saqara (ambas de la dinastía XI) se han detectado diversas líneas horizontales[9] tales que coinciden con diversos puntos importantes en el trazado de la figura humana. En la figura se aplican las líneas guía encontradas a una figura posterior de Sesostris III siendo las siguientes:

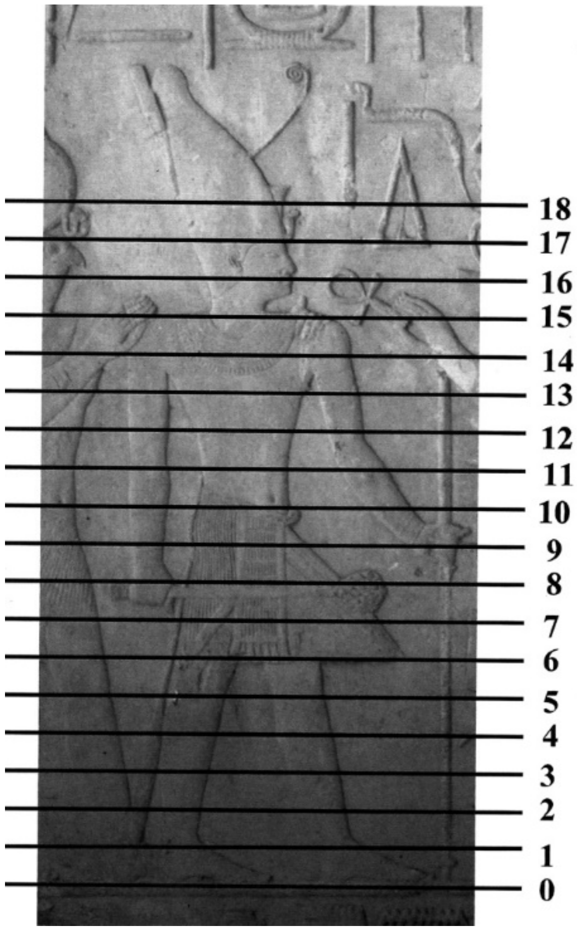
- Parte superior de la cabeza.
- Línea del pelo.
- Unión del cuello con los hombros
- Axila.
- Codo.
- Comienzo de las nalgas.
- Rodilla.
- Línea del suelo coincidente con la planta de los pies.

Aunque no todas aparecen siempre (como la parte superior de la cabeza, no incluida en ocasiones) existe una frecuente presencia de la mayoría y, lo que es más llamativo, las distancias relativas entre estas líneas guía se mantienen aproximadamente constantes. Evidentemente no podemos hablar de valores absolutos puesto que unas figuras eran más grandes que otras, sino del hecho constatable de que la distancia entre la línea del suelo y la de la rodilla era la misma que la que mediaba entre la rodilla y el codo o bien la distancia entre la línea del codo y la altura de la línea del pelo. Algunos de estos intervalos se dividían por la mitad (entre el codo y la rodilla se dibujaba a igual distancia de ambas la línea del comienzo de las nalgas) mientras que en algún otro caso se dividía en tres partes (entre los hombros y el pelo había una distancia que era la tercera parte de la que separaba los codos de la línea del pelo).

Pues bien, si dividimos estos intervalos por igual en la medida común más pequeña, es decir, en 1/3 de ½ de 1/3 = 1/18 encontramos la figura dividida en 18 intervalos iguales que puede aplicarse a la figura antes mostrada para dar lugar a nuevas líneas guía horizontales que señalan nuevos puntos importantes dentro del trazado de la figura.

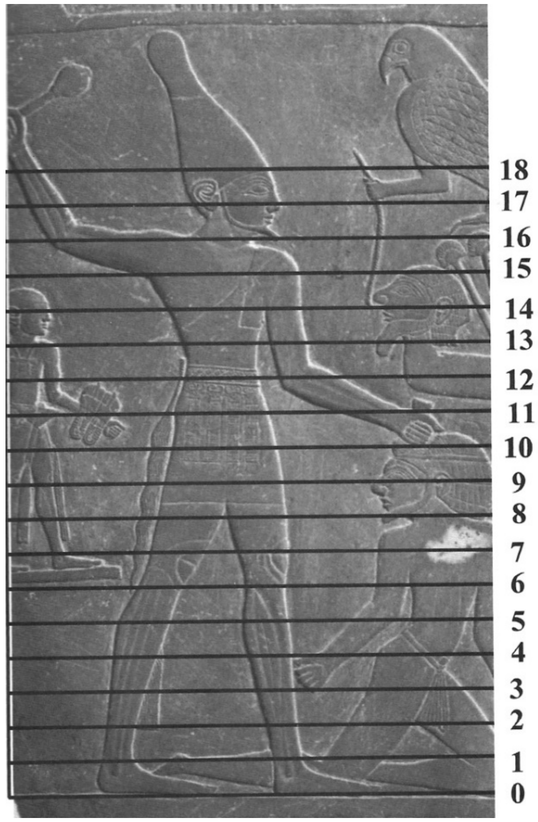


- Línea 18: Línea del pelo.
- Línea 17: Parte inferior de la nariz.
- Línea 16: Unión del cuello con los hombros.
- Línea 14: Pezón.
- Línea 12: Codo.
- Línea 11: Ombligo.
- Línea 10: Mayor convexidad de las nalgas.
- Línea 9 : Comienzo de las nalgas.
- Línea 6 : Rodilla.
- Línea 1 : Tobillo.
- Línea 0 : Planta del pie.



Lo más interesante de esta subdivisión de la altura de la figura humana en 18 intervalos iguales es que responde plenamente al sistema de cuadrículas encontrado en las pinturas del Imperio Medio y que constituyen lo que se ha denominado canon artístico de las proporciones propia de la pintura y escultura egipcias. Con ello se revela que el primer sistema (las líneas guía horizontales del Imperio Antiguo) tienen una estrecha relación con el segundo sistema (las cuadrículas del Imperio Medio). Queda a la interpretación de los investigadores si dicha relación es evolutiva, como defiende Robins, o el primer sistema constituye una simplificación del segundo del que se puede defender su existencia desde el mismo Imperio Antiguo, como cree Iversen[10]. Tienen en común, además, una división vertical que pasaría por el comienzo de la oreja y que se presentaría aisladamente en el primer sistema y marcando la referencia para el cuadriculado oportuno en el segundo (figura página anterior).

El segundo argumento en defensa del establecimiento del canon proporcional desde el Imperio Antiguo descansa en la aplicabilidad del sistema de cuadrículas encontrado en el Imperio Medio a las figuras encontradas en el Imperio Antiguo. Si la rejilla se puede adaptar a estas figuras de manera que las líneas horizontales más importantes coincidan ello será un argumento importante a favor de la constitución temprana del canon artístico. En este sentido se ha estudiado con detenimiento la figura que aparece en la paleta del rey Narmer, el que presumiblemente consiguió la unión del Alto y el Bajo Egipto en los comienzos del tercer milenio. Si se le aplica la cuadrícula conocida se obtiene una coincidencia general con algunas imprecisiones.



Así, la rodilla que debía estar centrada en la línea 6 lo hace en la 7 y este desplazamiento hacia arriba (que supone una longitud de la pierna excesivamente alargada respecto del canon) es aplicable también a las nalgas y presumiblemente al ombligo, aunque no aparezca dibujado. Sin embargo, otras coincidencias importantes (el codo, los hombros, la nariz, el tobillo) no aclaran la relación de esta figura con el canon. Hay coincidencias importantes pero también variaciones. Ello sugiere que el canon de proporciones se iba desarrollando paulatinamente estableciendo algunos puntos importantes (particularmente los señalados en las líneas guía horizontales) pero dejando al artista un margen de libertad para pintar a mano alzada el resto de las partes del cuerpo. El canon sería entonces una ayuda para guardar aproximadamente las proporciones de las figuras y no un sistema rígido de aplicación mecánica.

Variaciones en el Imperio Nuevo

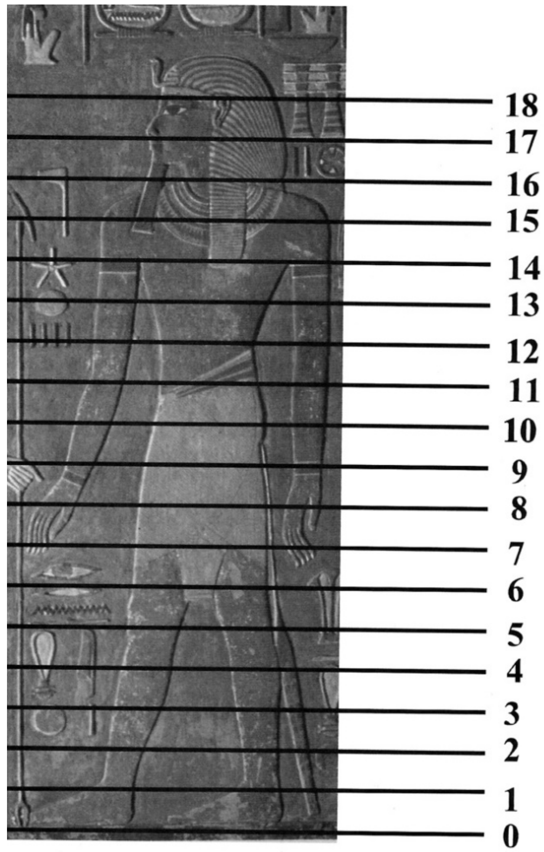
Diversos estudios sobre el arte egipcio han mostrado fehacientemente las variaciones mostradas por sus formas artísticas con el paso del tiempo de manera que, si bien existe un canon artístico en sentido amplio que se manifiesta en todo tiempo, también es constatable la existencia de escuelas distintas que adoptan criterios estéticos diferentes y reconocibles[11]. Estas diferencias también se encuentran en el terreno de las proporciones entre las partes de la figura humana, tal como se ha visto en la comparación entre el canon seguido en el Imperio Medio y las figuras anteriores del Imperio Antiguo.

Durante el Imperio Nuevo se pueden detectar distintas variaciones no siempre uniformes. Así, la aplicación de la cuadrícula a las figuras de este tiempo muestran en algunos casos un alargamiento de la longitud relativa de las piernas, quizá por la sensación de agilidad que se pretendiese dar a los faraones atléticos y guerreros de la época, pero incluso resulta más frecuente lo contrario: Un alargamiento de la parte superior del tronco con la consecuencia de ‘bajar’ el registro de las rodillas. Esto es bastante evidente en todas las imágenes de Akhenatón que se han conservado en Tell el-Amarna donde se observa que, además de otras profundas modificaciones de los criterios artísticos tradicionales en lo referente a la temática de las pinturas y al tratamiento de la figura del faraón, las cabezas presentan una forma exageradamente ahusada que coincide con otras rupturas en la forma con predominio de las líneas curvas (barriga prominente, caderas y nalgas feminoides).

Las figuras posteriores vuelven a retomar criterios y proporciones anteriores pero sin conseguirlo del todo. Es posible incluso que la ruptura artística y política que supuso el gobierno de Akhenatón y sus inmediatos sucesores desembocara en un desabastecimiento de artistas y un consecuente olvido de técnicas y proporciones elementales.

Akenhatón y Nefertiti adorando al dios Atón

Estas desproporciones son evidentes también en la figura del general y faraón Horemheb. En ella se aprecia que la rodilla está sobre la línea 5 lo que hace que las piernas sean cortas según el canon egipcio. El codo también desciende media cuadrícula así como la unión entre el cuello y los hombros, como sucedía en la figura anterior. El resultado es una imagen con las piernas más cortas de lo habitual y la cabeza más alargada, tal como apareció exageradamente en tiempos de Akhenathón.



Como consecuencia de estas variaciones,

"Debemos recordar que los cánones de proporciones y su expresión sobre la rejilla [cuadrícula] no son rígidos. No sólo las proporciones y por tanto la relación de puntos importantes del cuerpo sobre la rejilla cambian con el tiempo, sino que pueden variar dentro de los límites sobre el mismo monumento. La rejilla era sólo una guía y los dibujantes no contaron de línea en línea cuando dibujaban, sino que esbozaban sus contornos con golpes fluidos, produciendo figuras que se aproximaban a las proporciones ideales del periodo incluyendo a menudo pequeñas variaciones"[12].

Este autor concluye que no se debe adscribir un canon de proporciones al arte egipcio si bien es forzoso admitir la existencia de unas 'proporciones clásicas' con respecto a las cuales los pintores de las distintas épocas hicieron su trabajo y dieron a las figuras humanas del arte egipcio la apariencia y proporciones que las hacen características de dicha civilización.

Canon y metrología

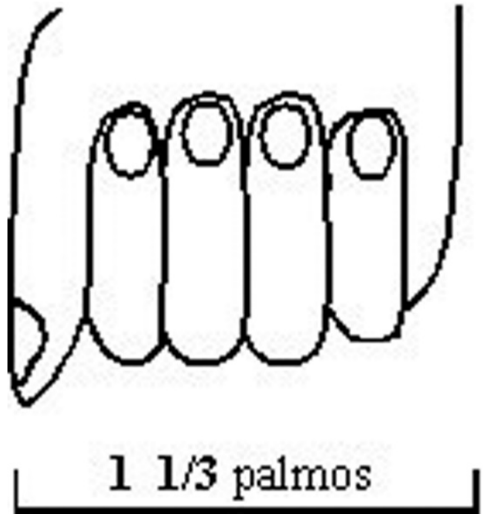
La opinión 'relativista' de Robins contrasta así con los que defienden (tal es el caso de Iversen) la existencia 'absoluta' de un canon de proporciones aplicable en todo momento y lugar. Que el canon de proporciones fuera una mera referencia, como afirma el primero apoyándose en las variaciones observadas, no es óbice para que ese papel de referencia se manifieste en las épocas donde ocurren esas variaciones (como en el Imperio Nuevo) constituyéndose, sin embargo, como sistema fielmente seguido en el período de su conformación como dicho canon (fundamentalmente, el Imperio Medio).

Desde esta perspectiva conviene examinar el canon en lo que se refiere a sus medidas relativas, en lo que seguiremos con la mayor fidelidad posible las aportaciones de Iversen[13]. Pues bien, Lepsius había observado en 1884[14] que la longitud del pie correspondía habitualmente a la longitud de tres cuadrados, es decir, a 1/6 de la altura de la figura tomada desde la planta de los pies hasta la línea del pelo, límite sugerido acertadamente dados los tocados y coronas de distinto tamaño que podían adornar la cabeza de las figuras reales. Si esto es así querría decir que las cuadrículas presentan una interpretación de las relaciones proporcionales entre las distintas partes del cuerpo basadas en una de sus partes, el pie.

Sin embargo, hay una importante objeción que hacer a estas relaciones. En el mundo egipcio el pie no es una unidad habitual de medida de longitud pero cuando se considera es equivalente a 2/3 del codo pequeño y, dado que éste corresponde a 45 centímetros, el pie mediría 30 centímetros lo cual es una medida elevada pero factible. No obstante, si el pie es la sexta parte de la distancia entre el suelo y la línea del pelo ello supondría que dicha distancia fuera de 1,80 metros, a lo que habría que añadir varios centímetros más hasta la mayor altura de la cabeza. Una altura cercana al 1,90 metros de estatura no es factible entre los antiguos egipcios.

Un estudio[15] realizado sobre un total de 60 momias conservadas en distintos centros revela que la talla máxima alcanza 1,81 metros y la mínima 1,45 estando la talla media de todas ellas alrededor del 1,65 metros, muy alejada de las medidas que supondría la consideración de que el pie fuera la unidad considerada en el momento de establecer el canon de proporciones. Este argumento, que volverá a ser utilizado con el estudio más pormenorizado de Iversen, es sin embargo discutible por cuanto la figura pintada puede reflejar las medidas ideales de la cultura artística egipcia antes que las más reales del egipcio medio.

En todo caso, Iversen se enfrenta al problema de determinar la parte del cuerpo relacionada con la unidad de la cuadrícula bajo otro supuesto. Así hace un registro de diversas pinturas observando que la longitud de una cuadrícula suele coincidir con el ancho de la mano que presenta cuatro dedos cerrados y el pulgar extendido. A esta unidad a la que denomina ‘puño’ le hace corresponder una dimensión de 1 1/3 palmos (1 palmo por los cuatro dedos doblados y 1/3 palmo, es decir, 1 1/3 dedo por el pulgar extendido).



A partir de este módulo compara las dimensiones habituales de diversas partes del cuerpo respecto a los cuadrados encontrando una gran coherencia entre las medidas observadas y las unidades antropométricas utilizadas por los egipcios:

- El pulgar ocupa 1/4 de cuadrado, siendo
  1/4 x 1 1/3 = 1/3 palmo.
- El palmo ocupa 3/4 de cuadrado, es decir,
  3/4 x 1 1/3 = 1 palmo.
- Distancia del hombro al codo representa habitualmente 3 3/4 cuadrados, lo que equivale a
  3 3/4 x 1 1/3 = 5 palmos (1 remen).
- Distancia del codo a la muñeca, 3 cuadrados, o sea 3 x 1 1/3 = 4 palmos (2/3 del codo corto).
- Distancia del codo al pulgar, 4 ½ cuadrados, es decir 4 ½ x 1 1/3 = 6 palmos (1 codo corto).
- Distancia del codo al dedo medio, aparece como 5 1/4 cuadrados, lo que da lugar a la cantidad de 5 1/4 x 1 1/3 = 7 palmos (1 codo real).
- Desde la planta del pie hasta la línea del pelo suponen 18 cuadrados, lo que lleva a una medida de 18 x 1 1/3 = 24 codos cortos, también llamada una braza.

Esta estrecha relación entre el canon y la metrología de origen antropométrico le permite afirmar que

> "Ya que la medida lineal era ciertamente más antigua que el sistema de proporción es obvio que, cuando los artistas egipcios establecieron un canon simplemente usaron las estandarizaciones de las proporciones naturales ya establecidas en su medida de longitud, constituyendo en sí mismo un sistema elemental de proporciones humanas"[16].

concluyendo más adelante que

> "... ahora somos capaces de definir, en términos más precisos, el sistema egipcio de proporción como una descripción antropométrica del cuerpo humano, basada en la estandarización de sus proporciones naturales expresadas en la medida egipcia de

> longitud. Como reflejo directo del sistema, la rejilla puede ser definida análogamente como las proyecciones geométricas de las proporciones canónicas, basadas en la identificación del cuadrado modular con el puño anatómico y antropológico de 1 1/3 palmos proporcionales”[17].

No se puede negar la consistencia interna de la hipótesis de Iversen por lo que las críticas recibidas se apoyan en los fundamentos más débiles de su sistema: La relación de las medidas preconizadas con la realidad observable. Así, se ha defendido el hecho de que fuerce las observaciones para que encajen con las medidas en cuadrados antes expuestas[18]. Sin embargo, la crítica más fuerte se debe a la arbitrariedad de la medida escogida como valor modular de la cuadrícula. En efecto, el pulgar no es una unidad de medida utilizada por los antiguos egipcios por lo que la medida de su anchura es imprecisa. El único dato existente a ese respecto es contradictorio con el argumento de Iversen.

En efecto, Lepsius encontró una expresión en jeroglíficos de las divisiones de dos palmos (haciendo un total de 8 dedos) en un número variable de dedos: Hasta el cuatro aparecen uno, dos, tres, cuatro dedos. Los cinco dedos se señalan con cinco dedos extendidos mientras que los seis dedos se dibujan como un puño con cuatro dedos doblados y el pulgar extendido, exactamente la misma unidad modular considerada por Iversen. Pero que el pulgar, como defiende este último, equivalga a 1 1/3 dedos no se apoya en ningún dato reconocible, mientras que en cambio la división de los dos palmos indica que el puño considerado por Iversen no equivale a 5 1/3 dedos (1 1/3 palmos) sino a 6 dedos. Así pues, la unidad modular escogida por Iversen es coherente con las medidas antropométricas utilizadas por los egipcios pero no responde a una equivalencia contrastable con los hechos arqueológicamente encontrados.

Con esto concluimos esta breve exposición sobre algunas posibles aplicaciones de la proporcionalidad geométrica tanto a la construcción como a expresiones artísticas relacionadas con la pintura y la escultura egipcias. Pese a que los datos son discutibles en muchos aspectos no cabe duda de que los escribas de aquella época utilizaron las relaciones de proporcionalidad tanto numérica como geométricamente. Su extensión a otros campos como los aquí mencionados es motivo de especulación y nuevas investigaciones.

Notas

1 Bierbrier, M. (1986): “Les bâtisseurs de pharaon. La confrerie de Deir el-Medineh”.
2 Clarke, S. y Engelbach, R. (1990): “Ancient Egyptian construction and architecture”.
3 Ibidem.
4 Ibidem.
5 Ibid, p. 50.
6 Ibid, p. 52.
7 Presedo, F.J. y Serrano, J.M. (1989): “La religion egipcia”, p. 42.
8 Robins, G. (1994): “Proportion and style in ancient Egyptian art”, p. 21.
9 Ibidem.
10 Iversen, E. (1975): “Canon and proportions in Egyptian Art”.
11 Stevenson, W. (2000): “Arte y Arquitectura en el Antiguo Egipto”.
12 Robins, G. Op. cit, p. 259.
13 Iversen, E. Op. cit.
14 Cit. en Robins, G. Op. cit.
15 Robins, G. (1984): “The length of the forearm in canon and metrology”.
16 Iversen, E. Op. cit, p. 33.
17 Ibidem.
18 Robins, G. (1994). Op. cit.

Bibliografía

ALBERTELLI, L. (1994): *El secreto de la construcción de la pirámide de Kheops.* Prado, Madrid.

ASSMAN, J. (1995): *Egipto.* Akal, Madrid.

BADAWY, A. (1948): *Le dessin architectural chez les anciens egyptiennes.* Imprimerie Nationale, El Cairo.

BIERBRIER, M. (1986): *Les bâtisseurs de pharaon. La confrerie de Deir el Medineh.* Rocher, Mónaco.

BLEIBERG, E. (1995): The Economy of Ancient Egypt. En SASSON, J.M.: *Civilizations of the Ancient Near East. Vol. III.* Simon & Schuster MacMillan, New York.

BLEIBERG, E. (1996): *The official gift in Ancient Egypt.* University of Oklahoma Press, Oklahoma.

BOYER, C. (1986): *Historia de la Matemática.* Alianza, Madrid.

BUTZER, K.W. (1976): *Early hydraulic civilization in Egypt.* University of Chicago Press, Chicago.

CAVEING, M. (1994): *Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Égypte Anciennes.* Presses Universitaires, Lille.

CLAGETT, M. (1995): *Ancient Egyptian Science. A Source book. Vol. II: Calendars, clocks and Astronomy.* American Philosophical Society, Filadelfia.

CLAGETT, M. (1999): *Ancient Egyptian Science. A Source book. Vol. III: Ancient Egyptian Mathematics.* American Philosophical Society, Filadelfia.

CLARKE, S. y ENGELBACH, R. (1990): *Ancient egyptian construction and architecture.* Dover, New York.

COLETTE, J.P. (1985): *Historia de las Matemáticas. Vol. I.* Siglo XXI, Madrid.

COUCHOUD, S. (1998): *Mathématiques egyptiennes.* Le Léopard d'Or, París.

DAHL, S. (1987): *Historia del libro.* Alianza, Madrid.

FERNÁNDEZ, L. (1993): *La propiedad inmueble y el registro de la propiedad en las sociedades antiguas. El Egipto faraónico.* Colegio de Registradores de la Propiedad, Madrid.

GAIRÍN, J.M. (1999): Los enigmáticos cálculos del escriba Ahmes. *Suma*. Número 31, 55-66.

GARDINER, A.H. (1935): A lawsuit arising from the purchase of two slaves. *Journal of Egyptian Archeology*. Vol. 21, 140-146.

GARDINER, A.H. (1961): *El Egipto de los faraones.* Laertes, Barcelona.

GASSE, A. (1988): *Données nouvelles administratives et sacerdotales sur l'organisation du domaine d'Amon. Vol. I.* Institut français d'archéologie orientale du Caire, El Cairo.

GHEVERGHESE, G. (1996): *La cresta del pavo real.* Pirámide, Madrid.

GILLAIN, O. (1927): *La Science Égyptienne. L'Arithmétique au Moyen Empire.* Fondation Égyptologique Reine Élisabeth, Bruselas.

GILLINGS, R.J. (1972): *Mathematics in the time of the faraons.* Dover, New York.

GLANVILLE, S.R.K. (1927): The mathematical leather roll in the British Museum. *Journal of Egyptian Archeology*. Vol. 13, 232-239.

GUNN, B. y PEET, T.E. (1929): Four geometrical problems from the Moscow Mathematical Papyrus. *Journal of Egyptian Archeology*. Vol. 15, 167-185.

HORNUNG, E. (1991): El faraón. En DONADONI, S. y Otros: *El hombre egipcio.* Alianza, Madrid.

IFRAH, G. (1987): *Las cifras. Historia de una gran invención.* Alianza, Madrid.

IFRAH, G. (1994): *Historia universal de las cifras.* Edhasa, Barcelona.

IVERSEN, E. (1975): *Canon and proportions in Egyptian Art.* Aris & Phillips, Warminster.

JANSSEN, J.J. (1975): *Commodity prices from the Ramessid period.* E.J. Brill, Leiden.

JANSSEN, J.J. (1979): The role of the temple in the Egyptian economy during the New Kingdom. En LIPINSKI, E.: *State and temple economy in the Ancient* Near East. *Vol. I.* Orientalia Lovaniensia Analecta, Leyden.

JANSSEN, J.J. (1991): Rations with riddles. *Göttingen Mirzellen.* Número 124, 91-111.

JANSSEN, J.J. (1992): Rations with riddles II. *Göttingen Mirzellen.* Número 128, 81-94.

KEMP, B.J. (1996): *El Antiguo Egipto. Anatomía de una civilización.* Crítica, Barcelona.

KLINE, M. (1992): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. Vol. I.* Alianza, Madrid.

LALOUETTE, C. (1986): *Thèbes ou la naissance d'un empire.* Fayard, París.

LARA, F. (1991): *El Egipto faraónico.* Istmo, Madrid.

LICHTEIM, M. (1988): *Ancient egyptian autobiographies chiefly of the Middle Kingdom.* Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

MARTÍN, F.J. (1998): *Amen-hotep III. El esplendor de Egipto.* Aldebarán, Madrid.

MASPERO, G. (2000): *Cuentos del Antiguo Egipto.* Abraxas, Barcelona.

MAZA, C. (1991): *Multiplicar y dividir.* Visor, Madrid.

MAZA, C. (1991): *Enseñanza de la suma y la resta.* Síntesis, Madrid.

MAZA, C. (1991): *Enseñanza de la multiplicación y división.* Síntesis, Madrid.

MAZA, C. (2000): *Las Matemáticas de la Antigüedad y su contexto histórico.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla, Sevilla.

MENU, B. (1982): *Recherches sur l'histoire juridique, economique et sociale de l'Ancienne Egypte.* Autor, Versalles.

PADRÓ, J. (1996): *Historia del Egipto faraónico.* Alianza, Madrid.

PEET, T.E. (1923): *The Rhind mathematical papyrus.* University Press of Liverpool and Hodder & Stoughton, Londres.

PEET, T.E. (1931): A problem in egyptian geometry. *Journal of Egyptian Archeology.* Vol. 17, 100-106.

PERNIGOTTI, S. (1991): El sacerdote. En DONADONI, S. y Otros: *El hombre egipcio.* Alianza, Madrid.

POSENER-KRIEGER, P. (1979): Les papyrus d'Abousir et l'économie des temples funéraires de l'Ancient Empire. En LIPINSKI, E.: *State and temple economy in the Ancient* Near East. *Vol. I.* Orientalia Lovaniensia Analecta, Leyden.
POSENER-KRIÉGER, P. y DE CENIVAL, J.L. (1968): *Hieratic papyri in the British Museum. The Abu Sir papyri.* Londres.

PRESEDO, F.J. y SERRANO, J.M. (1989): *La religión egipcia.* Akal, Madrid.

RACHEWILTZ, B. de (1991): *Los antiguos egipcios.* Plaza y Janés, Barcelona.

REY PASTOR, J. y PUIG, P. (1959): *Elementos de Geometría.* Autores, Madrid.

ROBINS, G. (1982): The length of the forearm in canon and metrology. *Göttinger Mirzellen.* Número 59, 61-75.

ROBINS, G. (1994): *Proportion and style in Ancient Egyptian Art.* Thames & Hudson, Londres.

ROBINS, G. y SHUTE, C. (1998): *The Rhind mathematical papyrus.* British Museum Press, Londres.

SÁNCHEZ, A. (2000): *Astronomía y matemáticas en el Antiguo Egipto.* Alderabán, Madrid.

SANMARTÍN, J. y SERRANO, J.M. (1998): *Historia antigua del Próximo Oriente.* Akal, Madrid.

SEIDENBERG, A. (1972): On the area of a semi-circle. *Archive for History of Exact Sciences.* Vol. 9, 173-211.

SERRANO, J.M. (1993): *Textos para la historia antigua de Egipto.* Cátedra, Madrid.

STEVENSON, W. (2000): *Arte y arquitectura del Antiguo Egipto.* Cátedra, Madrid.

STRUDWICK, N. (1985): *The Administration of Egypt in the Old Kingdom.* Routledge & Kegan Paul, Londres.

URRUELA, J.J. (1988): *Egipto: Época tinita e Imperio Antiguo.* Akal, Madrid.

USISKIN, Z. (1988): Conceptions of school Algebra and uses of variables. En COXFORD, A. y SHULTE, A.: *The ideas of Algebra, K-12.* National Council of Teachers of Mathematics, Reston.

VALBELLE, D. (1977): *Catalogue des poids à inscriptions hiératiques de Deir el-Medineh.* L'Institut français d'Archéologie Orientale.

VALBELLE, D. (1998): El Egipto faraónico. En HUSSON, G. y VALBELLE, D.: *Instituciones de Egipto.* Cátedra, Madrid.

WARBURTON, D. (1995): The economy of ancient Egypt revisited yet again. *Göttinger Mirzellen*. Número 146, 103-111.

WARBURTON, D. (1997): *State and economy in Ancient Egypt.* Iniversity Press of Fribourg, Fribourg.

WILSON, J.A. (1984): *La cultura egipcia.* Fondo de Cultura Económica, México.